

KVANTNA TEORIJA POLJA II  
Prvi deo  
Funkcionalni formalizam u teoriji polja

Voja Radovanović

Beograd, 2020. godina



# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Funkcionalni formalizam u kvantnoj mehanici</b>	<b>7</b>
1.1	Generišući funkcional . . . . .	7
1.2	Vacuum-Vacuum transition amplitude . . . . .	12
1.3	Green functions . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Funkcionalni izvod i integral</b>	<b>19</b>
<b>3</b>	<b>Funkcionalni integral u kvantnoj teoriji polja: skalarno polje</b>	<b>21</b>
3.1	Generišući funkcional i Grinove funkcije za skalarno polje . . . . .	21
3.2	Slobodno skalarno polje . . . . .	25
3.3	Grinove funkcije za slobodno skalarno polje . . . . .	29
3.4	Interakciona teorija skalarnog polja- $\phi^4$ teorija . . . . .	30
3.5	Povezane Grinove funkcije . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Efektivno dejstvo i verteksne funkcije</b>	<b>39</b>
4.1	Efektivno dejstvo . . . . .	39
4.2	Background field method . . . . .	41
4.3	Veza izmedju povezanih i $1PI$ Grinovih funkcija . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Švinger-Dajsonove jednačine i Vordovi identiteti</b>	<b>47</b>
5.1	Švinger-Dajsonove jednačine . . . . .	47
5.2	Vordovi identiteti . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Funkcionalni integral za fermionsko polje</b>	<b>51</b>
6.1	Grasmanovi brojevi . . . . .	51
6.2	Slobodno Dirakovo polje . . . . .	58
6.3	Majorana spinorsko polje . . . . .	60
<b>7</b>	<b>Funkcionalni formalizam: Gauge teorije</b>	<b>63</b>
7.1	Kratak podsetnik . . . . .	63
7.2	Kvantovanje kalibracionih polja . . . . .	65
7.3	Fadejev-Popovljeva metoda . . . . .	66
7.4	Fajnmanova pravila . . . . .	69



# Predgovor

Ovaj tekst posvećen je funkcionalnom kvantovanju u teoriji polja. Napisan je na osnovu predavanja koja držim master studentima Fizičkog fakulteta na predmetu Kvantna teorija polja 2. Funkcionalni formalizam predstavlja prvi deo ovog kursa.

Zahvaljujem se Dušku Latasu, docentu Fizičkog fakulteta, koji je nacrtao slike u ovoj skripti.

Beograd, 2020. godine

*Voja Radovanović*  
e-mail: rvoja@ipb.ac.rs



# Glava 1

## Funkcionalni formalizam u kvantnoj mehanici

Tradicionalni način da se klasični sistemi kvantuju je da klasične veličine, po principu korespondencije, zamenimo operatorima. Ovi operatori su definisani na Hilbertovom prostoru, koga čine fizička stanja sistema. Ovakvo kvantovanje je poznato kao kanonsko odnosno operatorsko kvantovanje. Međutim, pored njega postoji još jedan prilaz kvantizaciji zasnovan na funkcionalnom formalizmu, odnosno integraciji po trajektorijama. Tvorci ovog formalizma su Fajnman i Dirak. Ova glava je posvećena funkcionalnom kvantovanju kvantno mehaničkih sistema.

### 1.1 Generišući funkcional

Neka je  $L = L(q, \dot{q}, t)$  lagranžijan, a  $H = H(q, p, t)$  hamiltonijan klasičnog sistema sa jednim stepenom slobode. U kvantnoj teoriji kanonske promenljive  $q$  i  $p$  postaju operatori koordinate  $\hat{Q}$ , odnosno impulsa  $\hat{P}$ . Oni zadovoljavaju komutacionu relaciju

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar. \quad (1.1.1)$$

Svojstvene jednačine ovih operatora su

$$\hat{Q}|q\rangle = q|q\rangle, \quad \hat{P}|p\rangle = p|p\rangle, \quad (1.1.2)$$

gde su  $|q\rangle$  odnosno  $|p\rangle$  svojstveni vektori operatora koordinate odnosno impulsa. Oni zadovoljavaju relacije kompletnosti:

$$\int dq |q\rangle \langle q| = 1, \quad \int dp |p\rangle \langle p| = 1, \quad (1.1.3)$$

i normirani su prema

$$\langle q|q'\rangle = \delta(q - q'), \quad \langle p|p'\rangle = \delta(p - p'). \quad (1.1.4)$$

Evolucija sistema određena je Šredingerovom jednačinom

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \quad (1.1.5)$$

gde je  $\hat{H}$  hamiltonijan, a  $\psi$  talasna funkcija sistema. Ukoliko je u trenutku  $t_0$  vektor stanja  $|\psi(t_0)\rangle$  onda je u trenutku  $t$  stanje sistema dato sa

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad (1.1.6)$$

gde je

$$U(t, t_0) = T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t')} \quad (1.1.7)$$

tzv. evolucionni operator (propagator). U daljem ćemo pretpostaviti da hamiltonijan ne zavisi eksplicitno od vremena, tj. da je sistem konzervativan. Tada se evolucionni operator svodi na

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_0)}. \quad (1.1.8)$$

U Hajzenbergovoj slici operator koordinate je

$$\hat{Q}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} \hat{Q} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t}. \quad (1.1.9)$$

Šredingerovim stanjima  $|q\rangle$  odgovaraju stanja

$$|q, t\rangle_H = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} |q\rangle \quad (1.1.10)$$

u Hajzenbergovoj slici. Ona su svojstveni vektori operatora koordinate u Hajzenbergovoj slici  $\hat{Q}_H(t)$ :

$$\hat{Q}_H(t)|q, t\rangle = q|q, t\rangle. \quad (1.1.11)$$

Hajzenbergova stanja  $|q, t\rangle_H$  zadovoljavaju relacije kompletnosti:

$$\int dq |q, t\rangle \langle q, t| = \int dq e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} |q\rangle \langle q| e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} = 1, \quad (1.1.12)$$

i ortonormiranosti:

$$\langle q, t|q', t\rangle = \langle q| e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} |q'\rangle = \langle q|q'\rangle = \delta(q - q'). \quad (1.1.13)$$

Amplituda verovatnoće da čestica iz položaja  $q_i$  u trenutku  $t_i$  predje u položaj  $q_f$  u trenutku  $t_f$  je

$$\langle q_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_f - t_i)} | q_i \rangle, \quad (1.1.14)$$

što je matrični element evolucionog operatora. Možemo ga prepisati i u Hajzenbergovoj slici

$$\langle q_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_f - t_i)} | q_i \rangle = \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle. \quad (1.1.15)$$

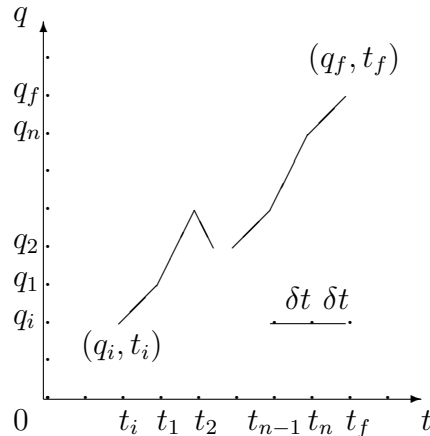
Talasna funkcija u trenutku  $t$  je

$$\begin{aligned} \psi(q, t) &= \langle q | \psi(t) \rangle_S = \langle q, t | \psi \rangle_H \\ &= \int dq' \langle q | U(t, t_0) | q' \rangle \langle q' | \psi(t_0) \rangle \\ &= \int dq' \langle q, t | q', t_0 \rangle \langle q', t_0 | \psi \rangle_H \\ &= \int dq' \langle q, t | q', t_0 \rangle \psi(q', t_0). \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

Podintegralni izraz je proizvod evolucionog operatora i talasne funkcije u početnom trenutku.

Da bismo odredili  $\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle$  podelićemo interval  $t_f - t_i$  na  $n + 1$  intervala takvih da je

$$t_f - t_i = (n + 1)\Delta t, \quad t_{k+1} - t_k = \Delta t, \quad t_i = t_0 \quad t_f = t_{n+1}. \quad (1.1.17)$$



Slika 1.1: The splitting of time interval and the corresponding path

Uvedimo  $n$  relacija kompletnosti  $1 = \int dq_k |q_k, t_k\rangle \langle q_k, t_k|$  u izraz za amplitudu prelaza

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \dots dq_n \langle q_f, t_f | q_n, t_n \rangle \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q_i, t_i \rangle. \quad (1.1.18)$$

Da bismo našli izraz za amplitudu prelaza potrebno je da odredimo amplitude

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \langle q_{j+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t} | q_j \rangle, \quad (1.1.19)$$

za malo  $\Delta t$ . Razvojem eksponeta u red imamo

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \delta(q_{j+1} - q_j) - \frac{i}{\hbar} \Delta t \langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j \rangle + O((\Delta t)^2). \quad (1.1.20)$$

Neka Hamiltonijan ima jednostavan oblik

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{Q}). \quad (1.1.21)$$

Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | \hat{P}^2 | q_j \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_j \langle q_{j+1} | \hat{P}^2 | p_j \rangle \langle p_j | q_j \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_j p_j^2 \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | q_j \rangle. \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

Kako je

$$\langle q | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} p q}, \quad (1.1.23)$$

to dobijamo

$$\langle q_{j+1} | \hat{P}^2 | q_j \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp_j p_j^2 e^{\frac{i}{\hbar} p_j (q_{j+1} - q_j)}. \quad (1.1.24)$$

Matrični element potencijala je

$$\langle q_{j+1} | \hat{V}(\hat{q}) | q_j \rangle = V\left(\frac{q_{j+1} + q_j}{2}\right) \delta(q_{j+1} - q_j) = V(\bar{q}_j) \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_j (q_{j+1} - q_j)}, \quad (1.1.25)$$

gde je  $\bar{q}_j = (q_{j+1} + q_j)/2$ . Izabrali smo da umesto  $q_j$  ili  $q_{j+1}$  u argumentu klasičnog potencijala pišemo njihovu srednju vrednost što odgovara simetričnom uređenju operatora. Dakle

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t} | q_j \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_j (q_{j+1} - q_j)} \left( 1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t \left( \frac{p_j^2}{2m} + V(\bar{q}_j) \right) + O((\Delta t)^2) \right) \\ &= \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_j (q_{j+1} - q_j)} e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \left( \frac{p_j^2}{2m} + V(\bar{q}_j) \right)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \Delta t \left( p_j \frac{q_{j+1} - q_j}{\Delta t} - \frac{p_j^2}{2m} - V(\bar{q}_j) \right)}. \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

Kako je klasični Hamiltonijan dat sa

$$H(p_j, \bar{q}_j) = \frac{p_j^2}{2m} + V(\bar{q}_j), \quad (1.1.27)$$

to (1.1.26) postaje

$$\langle q_{j+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t} | q_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} (p_j (q_{j+1} - q_j) - H(p_j, \bar{q}_j) \Delta t)}. \quad (1.1.28)$$

Klasični hamiltonijan ne mora biti oblika

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q),$$

već može biti komplikovanija funkcija koordinate i impulsa, npr.

$$H = \sum_{m,n} c_{mn} q^m p^n, \quad (1.1.29)$$

gde su  $c_{mn}$  koeficijenti. Kvantno mehanički analogon gornjeg hamiltonijana nije jednoznačno određen. Moramo definisati uređenje operatora  $\hat{P}$  i  $\hat{Q}$ , jer npr.  $\hat{Q}\hat{P}\hat{Q} \neq \hat{P}\hat{Q}\hat{Q}$ . Mi ćemo koristiti Weyl-ovo (simetrično) uređenje definisano sa

$$\hat{H}(\hat{P}, \hat{Q}) = \int \frac{dx}{2\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ix\hat{P} + ik\hat{Q}} \int dpdq e^{-ixp - ikq} H(p, q). \quad (1.1.30)$$

U ovom slučaju rezultat (1.1.28) ostaje nepromenjen. Ovo uređenje se naziva simetričnim jer postoji sledeća korespondencija klasičnih izraza sa oeratorskim

$$\begin{aligned} qp &\rightarrow \frac{1}{2}(\hat{Q}\hat{P} + \hat{P}\hat{Q}) \\ q^2 p &\rightarrow \frac{1}{4}(\hat{Q}^2\hat{P} + 2\hat{Q}\hat{P}\hat{Q} + \hat{P}\hat{Q}^2). \end{aligned} \quad (1.1.31)$$

Iz (1.1.18) i (1.1.28) sledi da je amplituda prelaza data sa

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int \prod_{i=1}^n dq_i \int \prod_{j=0}^n dp_j \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n+1}} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^n \Delta t (p_j \frac{q_{j+1} - q_j}{\Delta t} - H(p_j, \bar{q}_j))}. \quad (1.1.32)$$

Ako uzmemo limes  $n \rightarrow \infty$  i  $\Delta t \rightarrow 0$ , ali tako da je njihov proizvod  $n\Delta t$  konačan,  $(2n + 1)$ -struki integral postaće integral po trajektorijama (path integral ili funkcionalni integral). Mera integracije je proizvod  $\mathcal{D}q\mathcal{D}p$ , gde je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n dq_i = \mathcal{D}q, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{j=0}^n dp_j}{(2\pi\hbar)^{n+1}} = \mathcal{D}p. \quad (1.1.33)$$

U ovom limesu imamo još i

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q_{j+1} - q_j}{\Delta t} = \dot{q}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=0}^n \Delta t = \int_{t_i}^{t_f} dt, \quad (1.1.34)$$

pa je

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (p\dot{q} - H(p, q))}. \quad (1.1.35)$$

Naglasimo još jednom da fazna trajektorija zadovoljava granični uslov

$$q(t_i) = q_i, \quad q(t_f) = q_f, \quad (1.1.36)$$

dok vrednosti impulsa u početnom i krajnjem trenutku nisu određeni. Rezultat (1.1.35) je fazni integral po trajektorijama. Amplituda verovatnoće se dobija integracijom po svim trajektorijama u faznom prostoru uz dati granični uslov. Težinski faktor za trajektoriju je faza  $e^{iS_H/\hbar}$ , gde je  $S_H$  dejstvo u Hamiltonovoj formi.

U slučaju kada je Hamiltonijan dat sa

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{Q})$$

možemo u izrazu u (1.1.35) integraliti po impulsima. Podjimo od izraza

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int dq_1 \dots dq_n \int \frac{dp_0 \dots dp_n}{(2\pi\hbar)^{n+1}} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^n \Delta t (p_j \frac{q_{j+1} - q_j}{\Delta t} - \frac{p_j^2}{2m} - V(\bar{q}_j))}. \quad (1.1.37)$$

i primenimo Gausov integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha x^2 + \beta x} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}, \quad (1.1.38)$$

koji je definisan za  $\text{Re } \alpha > 0$ . U našem slučaju parametar  $\alpha$  je imaginaran pa ćemo  $\Delta t$  zameniti sa

$$(1 - i\delta)\Delta t, \quad (1.1.39)$$

gde je  $\delta$  mali pozitivan broj. Tako dobijamo da su integracije po impulsima Gausove

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_j e^{-\frac{i\Delta t(1-i\delta)}{2m\hbar} p_j^2 + \frac{i}{\hbar} p_j (q_{j+1} - q_j)} = \sqrt{\frac{2m\hbar\pi}{i\Delta t}} e^{-\frac{m(q_{j+1} - q_j)^2}{2i\hbar\Delta t}}. \quad (1.1.40)$$

Amplituda prelaza je onda

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \left( \frac{m}{2\pi\hbar i \Delta t} \right)^{\frac{n+1}{2}} \int dq_1 \dots dq_n e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^n \Delta t \left( \frac{m}{2} \frac{(q_{j+1} - q_j)^2}{(\Delta t)^2} - V(\bar{q}_j) \right)}. \quad (1.1.41)$$

U limesu  $n \rightarrow \infty$  i  $\Delta t \rightarrow 0$  ali tako da je njihov proizvod konačan uz oznaku

$$N = \left( \frac{m}{2\pi\hbar i \Delta t} \right)^{\frac{n+1}{2}} \rightarrow \infty, \quad (1.1.42)$$

dobijamo

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = N \int Dq e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right)}. \quad (1.1.43)$$

U eksponentu podintegralne funkcije figuriše klasično dejstvo

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}).$$

Dobijeni funkcionalni integral je tzv. konfiguracioni path integral

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = N \int Dq e^{\frac{i}{\hbar} S[q]}, \quad (1.1.44)$$

jer integralimo po trajektorijama u prostoru koordinata. Path integral je suma svih mogućih trajektorija (uz odgovatajući granični uslov) otežinjena sa faznim faktorom  $e^{\frac{i}{\hbar} S[q]}$ . U klasičnoj mehanici čestica se kreće po jednoj, tzv. klasičnoj trajektoriji, dok u kvantnoj mehanici su moguće sve trajektorije. U limesu  $\hbar \ll S$  najveći doprinos amplitudi prelaza daje klasična trajektorija. To je klasičan limes.

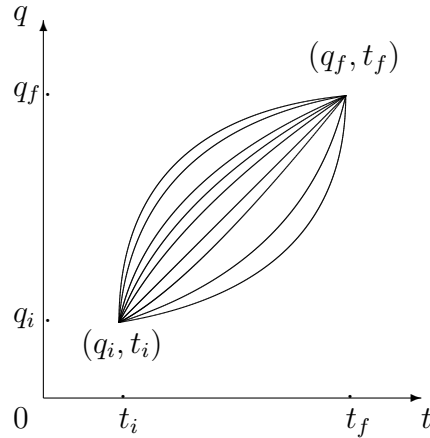
## 1.2 Vacuum-Vacuum transition amplitude

Iz odredjenih tehničkih razloga uvešćemo dopunsku interakciju koordinate sa pomoćnim poljem  $J(t)$ . Veličina  $J(t)$  se naziva izvorom. Pretpostavićemo da je ona oblika kao na slici, tj. da je izvor nenulti u oblasti  $t_- < t < t_+$ . Amplituda prelaza da čestica iz početnog položaja  $q_i$  u trenutku  $t_i$  pređe u položaj  $q_f$  u trenutku  $t_f$ , prisustvu izvora je

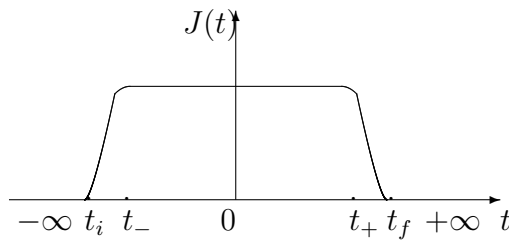
$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle_J = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (p\dot{q} - H(p, q) + Jq)}. \quad (1.2.45)$$

Vidimo da je hamiltonijan  $H$  'prešao' u  $H - Jq$ . Zadnji član je kapling izvora sa koordinatom. Primenom  $1 = \int dq_- |q_-, t_-\rangle \langle q_-, t_-|$  i  $1 = \int dq_+ |q_+, t_+\rangle \langle q_+, t_+|$  dobijamo

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle_J = \int dq_- dq_+ \langle q_f, t_f | q_+, t_+\rangle \langle q_+, t_+ | q_-, t_-\rangle_J \langle q_-, t_- | q_i, t_i \rangle \quad (1.2.46)$$



Slika 1.2: The integration over all possible paths

Slika 1.3: The source current:  $t_i < t_- < t_+ < t_f$   $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} J(t) = 0$ 

Svojsvtvena jednačina Hamiltonijana je

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (1.2.47)$$

dok su

$$\psi_n(q) = \langle q|n\rangle \quad (1.2.48)$$

svojsvtvena stanja u koordinatnoj reprezentaciji. Ubacivanjem kompletnog skupa energetske stanja imamo

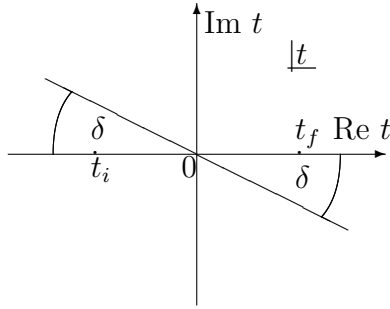
$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | q_+, t_+ \rangle &= \sum_n \langle q_f, t_f | n \rangle \langle n | q_+, t_+ \rangle = \sum_n \langle q_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t_f} | n \rangle \langle n | e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t_+} | q_+ \rangle \\ &= \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t_f - t_+)} \psi_n(q_f) \psi_n^*(q_+) \end{aligned} \quad (1.2.49)$$

i slično

$$\langle q_-, t_- | q_i, t_i \rangle = \sum_n \psi_n(q_-) e^{\frac{i}{\hbar} E_n (t_i - t_-)} \psi_n^*(q_i). \quad (1.2.50)$$

Želimo da inicijalno i finalno stanje budu osnovna stanja u  $t_i \rightarrow -\infty$  odnosno  $t_f \rightarrow \infty$ . Izrazi (1.2.49) i (1.2.50) u ovim limesima nisu dobro definisani. Opet nam nedostaje mali imaginarni deo u eksponentima u ovim izrazima. Možemo Hamiltonijan zameniti sa  $H' = H(1 - i\delta)$  ili uzeti limes

$$\begin{cases} t_i \rightarrow -\infty(1 - i\delta) = -\infty e^{-i\delta}, \\ t_f \rightarrow \infty(1 - i\delta) = \infty e^{-i\delta}. \end{cases} \quad (1.2.51)$$

Slika 1.4: The rotation of time axis by an angle  $\delta$  in the complex plane

U zadnjoj formuli je  $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ . Gornji limesi odgovaraju smeni  $t \rightarrow te^{-i\delta}$ , što je integracija po osi dobijenoj rotiranjem ose  $\text{Re } t$  za ugao  $\delta$  kao na slici. U ovim limesima najsporiše opada doprinos osnovnog stanja pa dobijamo

$$\langle q_f, t_f | q_+, t_+ \rangle \rightarrow \lim_{t_f \rightarrow \infty e^{-i\delta}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t_f} \psi_0(q_f) \psi_0^*(q_+, t_+), \quad (1.2.52)$$

$$\langle q_-, t_- | q_i, t_i \rangle \rightarrow \lim_{t_i \rightarrow -\infty e^{-i\delta}} e^{\frac{i}{\hbar} E_0 t_i} \psi_0^*(q_i) \psi_0(q_-, t_-). \quad (1.2.53)$$

Veličina

$$\lim_{\substack{t_f \rightarrow \infty e^{-i\delta} \\ t_i \rightarrow -\infty e^{-i\delta}}} \frac{\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle_J}{\psi_0(q_f, t_f) \psi_0^*(q_i, t_i)} = \int dq_+ dq_- \psi_0^*(q_+, t_+) \langle q_+, t_+ | q_-, t_- \rangle_J \psi_0(q_-, t_-) \quad (1.2.54)$$

je amplituda verovatnoće da sistem u osnovnom stanju u trenutku  $t_-$  ostane u osnovnom stanju u trenutku  $t_+$ . Ako uzmem da perturbacija deluje sve vreme  $t_- \rightarrow -\infty$ ,  $t_+ \rightarrow \infty$  dobijamo amplitudu verovatnoće da sistem ostane u osnovnom stanju u prisustvu izvora

$$Z[J] = \langle \Omega | \Omega \rangle_J = \lim_{\substack{t_i \rightarrow \infty e^{-i\delta} \\ t_f \rightarrow -\infty e^{-i\delta}}} \frac{\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle_J}{\psi_0^*(q_f, t_f) \psi_0(q_i, t_i)}. \quad (1.2.55)$$

Dakle

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (p\dot{q} - H(p, q) + Jq)}. \quad (1.2.56)$$

Normalizacija je određena zahtevom  $Z[0] = 1$ , pa je

$$N^{-1} = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (p\dot{q} - H(p, q))}. \quad (1.2.57)$$

Dakle

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (p\dot{q} - H(p, q) + Jq)}}{\int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (p\dot{q} - H(p, q))}}. \quad (1.2.58)$$

Gornja amplituda ne zavisi od izbora graničnih uslova

$$\lim_{t_i \rightarrow -\infty} q(t) = q_i, \quad \lim_{t_f \rightarrow \infty} q(t) = q_f. \quad (1.2.59)$$

Ako je  $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$  onda je

$$Z[J] = N' \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt(L(q,\dot{q}) + Jq)} , \quad (1.2.60)$$

gde je  $N'$  normalizacioni faktor.

Generalno govoreći funkcionalni (path) integral nije dobro definisan. Veličina

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \right)$$

je realna pa je podintegralna funkcija u path integralu oscilatorna. Da bismo dobili dobro definisan integral možemo uvesti euklidsko vreme<sup>1</sup>  $\tau = it$ . Prelazak na euklidsko vreme se naziva Vikovom rotacijom. Analitičko produženje na imaginarno vreme zasnovano na činjenici da u oblasti integracije sa slike 1.5 nema singulariteta pa je za  $T \rightarrow \infty$

$$\int_{-T}^T dt f(t) + \int_{-iT}^{iT} d(iy) f(iy) = 0 \quad (1.2.61)$$

odnosno

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T dt f(t) &= - \int_{-iT}^{iT} d(iy) f(iy) \\ &= -i \int_{-T}^T d(\tau) f(-i\tau) , \end{aligned} \quad (1.2.62)$$

gde smo uveli smenu  $y = -i\tau$ .

Dakle, potrebno je da napravimo zamenu  $t = -i\tau$  u dejstvu i da integralimo od  $-\infty$  do  $\infty$  po euklidskom vremenu  $\tau$ . Lako se dobija

$$\dot{q}^2 = - \left( \frac{dq}{d\tau} \right)^2 , \quad iS = - \int_{t_i}^{t_f} d\tau \left[ \frac{1}{2} m \left( \frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V(q) \right] = -S_E \quad (1.2.63)$$

pa je euklidski path integral

$$Z_E[J] = N_E \int \mathcal{D}q e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau (L(q, i \frac{dq}{d\tau}) + Jq)} . \quad (1.2.64)$$

Drugi, ekvivalentni pristup je da pomnožimo Hamiltonijan sa  $1 - i\delta$ . Na taj način dobijamo

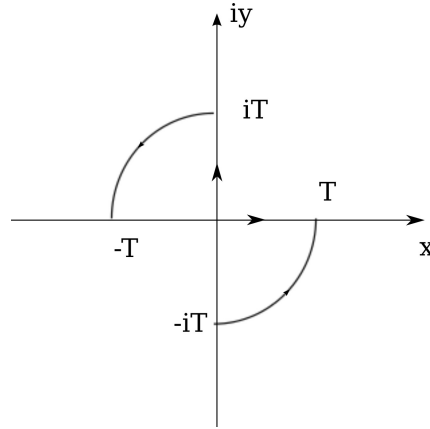
$$Z[J] = \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q e^{i \int_{-\infty}^{\infty} dt (pq - (1 - i\delta)H + Jq)} .$$

U slučaju harmonijskog oscilatora, hamiltonijana

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} ,$$

---

<sup>1</sup>U ovom slučaju  $\delta = \frac{\pi}{2}$ .



Slika 1.5:

množenje sa  $1 - i\delta$  je ekvivalentno sa smenom

$$\omega^2 \rightarrow \omega^2(1 - i\delta) = \omega^2 - i\delta$$

u faznom funkcionalnom integralu. Mogli smo i da dodamo član  $-i\delta q^2/2$ , ( $\delta \rightarrow 0$ ) u hamiltonijan. Analogno, dodavanjem  $i\delta q^2/2$  u lagranžijan daje konvergenciju konfiguracionog funkcionalnog integrala

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}q \int e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt(L(q, \dot{q}) + Jq + \frac{i}{2}\delta q^2)}. \quad (1.2.65)$$

Sve bi ovo dovelo do konvergentnog integrala. Path integral se onda definiše na ovaj način.

Generalizacija na sisteme sa više stepeni slobode je pravolinijska. Neka je  $H = H(q_i, p^i, t)$  hamiltonijan sistema sa  $n$  stepeni slobode. Generalisane koordinate su  $q_i = q_1, \dots, q_n$ , a impulsi  $p^i = p^1, \dots, p^n$ . Generalizacijom izraza (1.1.35) dobijamo amplitudu prelaza

$$\langle q_{1f}, \dots, q_{nf}, t_f | q_{i1}, \dots, q_{ni}, t_i \rangle = \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt(p^i \dot{q}_i - H(q_i, p^i))}. \quad (1.2.66)$$

U početnom trenutku sistem se nalazi u tački  $q_{i1}, \dots, q_{ni}$ , a u finalnom u  $q_{1f}, \dots, q_{nf}$ . Generalisani impulsi su proizvoljni. Ampiltuda prelaza iz osnovnog stanja u osnovno stanje u prisustvu izvora data je sa

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt(p_i \dot{q}_i - H(p, q) + J_i q_i)}}{\int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt(p_i \dot{q}_i - H(p, q))}}. \quad (1.2.67)$$

Mera integracije je

$$\mathcal{D}q = \prod_i \mathcal{D}q_i, \quad \mathcal{D}p = \prod_i \mathcal{D}p_i. \quad (1.2.68)$$

### 1.3 Green functions

Nadjimo matični element dva operatora koordinate

$$\langle q_f, t_f | \hat{Q}_H(t_b) \hat{Q}_H(t_a) | q_i, t_i \rangle$$

za  $t_b > t_a$ . Deleći interval  $t_f - t_i$  kao u prvoj sekciji i primenjujući relacije kompletnosti imamo

$$\begin{aligned}
\langle q_f, t_f | \hat{Q}_H(t_b) \hat{Q}_H(t_a) | q_i, t_i \rangle &= \int dq_1 \dots dq_n \langle q_f, t_f | q_n, t_n \rangle \langle q_n, t_n | \dots | q_{b+1}, t_{b+1} \rangle \\
&\quad \times \langle q_{b+1}, t_{b+1} | \hat{Q}_H(t_b) | q_b, t_b \rangle \langle q_b, t_b | \\
&\quad \dots | q_{a+1}, t_{a+1} \rangle \langle q_{a+1}, t_{a+1} | \hat{Q}_H(t_a) | q_a, t_a \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q_i, t_i \rangle \\
&= \int dq_1 \dots dq_n q_b q_a \langle q_f, t_f | q_n, t_n \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q_i, t_i \rangle \\
&= \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p q(t_b) q(t_a) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (p\dot{q} - H(p, q))}. \tag{1.3.69}
\end{aligned}$$

Vremensko uredjenje dva operatora je definisano sa

$$T(\hat{Q}_H(t_b) \hat{Q}_H(t_a)) = \begin{cases} \hat{Q}_H(t_b) \hat{Q}_H(t_a), & t_b > t_a \\ \hat{Q}_H(t_a) \hat{Q}_H(t_b), & t_a > t_b \end{cases}. \tag{1.3.70}$$

Onda je

$$\begin{aligned}
\langle q_f, t_f | T(\hat{Q}_H(t_1) \dots \hat{Q}_H(t_n)) | q_i, t_i \rangle \\
= \int \mathcal{D}q \int v p q(t_1) \dots q(t_n) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (p\dot{q} - H(p, q))}. \tag{1.3.71}
\end{aligned}$$

Vakumska očekivana vrednost vremenskog urednja operatora koordinate se dobija uzimanjem limesa  $t_i \rightarrow -\infty e^{-i\delta}$  and  $t_f \rightarrow \infty e^{-i\delta}$ . Ovi limesi izdvajaju osnovna stanja u dalekoj prošlosti odnosno budućnosti pa je

$$\begin{aligned}
&\langle \Omega | T(\hat{Q}_H(t_1) \dots \hat{Q}_H(t_n)) | \Omega \rangle \\
&= \lim_{\substack{t_f \rightarrow \infty e^{-i\delta} \\ t_i \rightarrow -\infty e^{-i\delta}}} \frac{\int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p q(t_1) \dots q(t_n) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (p\dot{q} - H(p, q))}}{\int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (p\dot{q} - H(p, q))}} \\
&= \left( \frac{\hbar}{i} \right)^n \frac{\delta^n}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} \frac{\int \mathcal{D} \int \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt (p\dot{q} - H(p, q) + Jq)}}{\int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt (p\dot{q} - H(p, q))}} \Big|_{J=0} \\
&= \left( \frac{\hbar}{i} \right)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0} \tag{1.3.72}
\end{aligned}$$

Ova vakuumska očekivana vrednost je  $n$  tačkasta Grinova funkcija (korelator)

$$G^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \langle \Omega | T(\hat{Q}_H(t_1) \dots \hat{Q}_H(t_n)) | \Omega \rangle = \left( \frac{\hbar}{i} \right)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0}. \tag{1.3.73}$$



# Glava 2

## Funkcionalni izvod i integral

Funkcija više promenljivih  $g = g(x_1, \dots, x_n)$  je preslikavanje iz  $R^n$  u  $R$ . Funkcional  $F[f(x)]$  preslikava funkcije u brojeve  $F : f(x) \rightarrow R$ . Diferencijal funkcije  $g = g(x_1, \dots, x_n)$  je

$$dg = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i \quad (2.0.1)$$

Želimo da definišemo funkcionalni izvod. Ako diskretne nezavisno promenljive  $x_1, \dots, x_n$  prelaze u kontinualnu promenljivu  $x$ , a  $\sum \rightarrow \int$  to (2.0.1) prelazi u

$$\delta F[f(x)] = \int dy \frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} \delta f(y) ,$$

Izraz

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)}$$

je funkcionalni izvod. Dosta formalnije funkcionalni izvod se definiše prema

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f(x) + \epsilon \delta(x - y)] - F[f(x)]}{\epsilon} . \quad (2.0.2)$$

Funkcionalni integral je generalizacija Gausovog integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{a}{2}y^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} , \quad \text{Re } a > 0 , \quad (2.0.3)$$

Gausov jednodimenzioni integral se lako generališe na višedimenzioni. Ako uzmemo da je  $Y = (y_1 \dots y_n)^T$ ,  $\rho = (\rho_1 \dots \rho_n)^T$  i  $A$  je  $n \times n$  simetrična matrica onda

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \dots dy_n e^{-\frac{1}{2}Y^T A Y + \rho^T Y} = \frac{1}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{1}{2}\rho^T A^{-1}\rho} . \quad (2.0.4)$$

U sledećem koraku gornji izraz generalizujemo na funkcionalni integral

$$\int D\varphi e^{-\frac{1}{2} \int dx dy \varphi(x) A(x,y) \varphi(y) + \int dx \rho(x) \varphi(x)} = \frac{1}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{1}{2} \int dx dy \rho(x) A^{-1}(x,y) \rho(y)} , \quad (2.0.5)$$

gde je sada  $A$  beskonačno dimenziona matrica.

Uvodeći kompleksne promenljive

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ \bar{z} &= x - iy, \end{aligned} \quad (2.0.6)$$

uz

$$dzd\bar{z} \equiv 2dxdy \quad (2.0.7)$$

Gausov integral je

$$\int dzd\bar{z} e^{-\bar{z}az} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-a(x^2+y^2)} = \frac{2\pi}{a}. \quad (2.0.8)$$

Neka je  $Z = (z_1 \dots z_n)^T$  i  $\bar{Z} = (\bar{z}_1 \dots \bar{z}_n)^T$  i neka je  $A$  hermitska matrica onda

$$(2\pi)^{-n/2} \int dz_1 d\bar{z}_1 \dots \int dz_n d\bar{z}_n e^{-\bar{Z}^T A Z} = \frac{1}{\det A}. \quad (2.0.9)$$

Generalizacijom dobijamo sledeći funkcionalni integral

$$\int D\phi D\phi^* e^{-\int dx dy \phi^*(x) A(x,y) \phi(y)} = \frac{1}{\det A} \quad (2.0.10)$$

odnosno

$$\int D\phi D\phi^* e^{-\int dx dy \phi^*(x) A(x,y) \phi(y) + \int dx (J\phi^* + J^*\phi)} = \frac{1}{\det A} e^{\int d^4x d^4y J^*(x) A^{-1}(x,y) J(y)}. \quad (2.0.11)$$

# Glava 3

## Funkcionalni integral u kvantnoj teoriji polja: skalarno polje

U ovoj glavi ćemo kvantovati skalarno polje primenom funkcionalnog formalizma. U prvom delu daćemo opšte formule, zatim u drugom poglavlju naćićemo generišući funkcional za slobodno skalarno polje. Poslednje poglavlje posvećeno je interakcionoj teoriji. Formalizam kvantovanja preko funkcionalnog integrala ćemo objasniti na primeru  $\phi^4$  teorije.

### 3.1 Generišući funkcional i Grinove funkcije za skalarno polje

Polja su fizički sistemi sa beskonačno puno stepeni slobode. Konkretno, skalarno polje

$$\phi(x) \equiv \phi_{\mathbf{x}}(t) \quad (3.1.1)$$

ima beskonačno puno stepeni slobode, jer je indeks  $\mathbf{x}$  kontinualan<sup>1</sup>.

Veza izmedju operatora skalarnog polja u Šredingerovoj,  $\hat{\phi}(0, \mathbf{x})$  i u Hajzenbergovoj slici  $\hat{\phi}(t, \mathbf{x})$  je

$$\hat{\phi}(t, \mathbf{x}) = e^{i\hat{H}t} \hat{\phi}(0, \mathbf{x}) e^{-i\hat{H}t} . \quad (3.1.2)$$

Po analogiji sa relacijom (1.1.11) imamo

$$\hat{\phi}(t, \mathbf{x}) |\phi(\mathbf{x}), t\rangle = \phi(\mathbf{x}) |\phi(\mathbf{x}), t\rangle . \quad (3.1.3)$$

Amplituda za prelazak iz početne konfiguracije  $\phi'(\mathbf{x})$  u trenutku  $t_i$  u finalnu konfiguraciju  $\phi''(\mathbf{x})$  u trenutku  $t_f$  je

$$\langle \phi''(\mathbf{x}), t_f | \phi'(\mathbf{x}), t_i \rangle = \int_{\substack{\phi(t_f, \mathbf{x}) = \phi''(\mathbf{x}) \\ \phi(t_i, \mathbf{x}) = \phi'(\mathbf{x})}} D\phi D\pi e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x (\pi \dot{\phi} - \mathcal{H}(\pi, \phi))} , \quad (3.1.4)$$

---

<sup>1</sup>U teoriji polja se pod brojem stepeni slobode polja uzima broj nezavisnih realnih komponenti polja. U tom smislu realno skalarno polje ima jedan, a kompleksno dva stepena slobode.

gde je  $\pi$  generalisani impuls, a  $\mathcal{H}(\pi, \phi)$  gustina hamiltonijana.

U limesu  $t_i \rightarrow -\infty e^{-i\delta}$ ,  $t_f \rightarrow \infty e^{-i\delta}$  gornja amplituda postaje vakuum-vakuu amplituda prelaza

$$Z[J] = \langle \Omega | \Omega \rangle_J = N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi e^{i \int d^4x (\pi \dot{\phi} - \mathcal{H}(\pi, \phi) + J\phi)}, \quad (3.1.5)$$

gde smo uveli i interakciju polja sa spoljnim izvorom  $J$ . Ako je podintegralna funkcija u funkcionalnom integralu (3.1.5) kvadratna po impulsima, onda se po impulsima lako integriše. Tako dobijamo

$$Z[J] = \langle \Omega | \Omega \rangle_J = N \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi)}, \quad (3.1.6)$$

gde je  $N$  normalizaciona konstanta. Nju odredjujemo iz zahteva da je  $Z[0] = 1$ .

Polje  $\phi$  interaguje samo sa sobom, ali i sa spoljnim izvorom  $J(x)$ . Izvor je pomoćna veličina. Ukupni Hamiltonijan je zbir 'pravog' Hamiltonijana  $H = H_0 + H_{\text{int}}$  i člana  $\int d^4x J\phi$ :

$$H_T = H_0 + H_{\text{int}} - \int d^4x J\hat{\phi}.$$

Osnovno stanje totalnog Hamiltonijana je  $|\Omega\rangle_J$ , a pravog Hamiltonijana (tj. kada je  $J = 0$ ) je  $|\Omega\rangle$ . Amplituda prelaza iz vakuuma u vakuum u prisustvu izvora je

$$\langle \Omega | \Omega \rangle_J = \langle \Omega | T e^{i \int d^4x J\hat{\phi}} | \Omega \rangle, \quad (3.1.7)$$

gde je  $\hat{\phi}$  operator polja 'prave' teorije u Hajzenbergovoj slici, a  $J$  klasična funkcija. Gornja formula je matični element  $S$  matrice, u kome su operator polja i vakumska stanja u interakcionoj slici ukupnog hamiltonijana. Operator skalarnog polja u interakcionoj slici totalnog Hamiltonijana je

$$\phi(x) = e^{iH(t-t_0)} \phi_S(t_0, \mathbf{x}) e^{-iH(t-t_0)}, \quad (3.1.8)$$

jer je sada  $H_0$  zamenjeno sa  $H = H_0 + H_{\text{int}}$ . Vidimo da je  $\phi(x)$  polje u Hajzenbergovoj slici modela čiji je hamiltonijan  $H$ .

Funkcional  $Z[J]$  je vakuum-vakuu amplituda prelaza u prisustvu izvora

$$Z[J] = \langle \Omega | \Omega \rangle_J = \langle \Omega | T e^{i \int d^4x J\hat{\phi}} | \Omega \rangle, \quad (3.1.9)$$

odnosno

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \langle \Omega | T \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) | \Omega \rangle J(x_1) \dots J(x_n). \quad (3.1.10)$$

U izrazu (3.1.10) operatori i stanja su u Hajzenbergovoj slici, dok je  $n$ -tačkasta Grinova funkcija (korelator)

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle \Omega | T (\hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n)) | \Omega \rangle. \quad (3.1.11)$$

Funkcional  $Z[J]$  možemo razviti u funkcionalni red

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \left. \frac{\delta^{(n)} Z[J]}{\delta J(x_n) \dots \delta J(x_1)} \right|_{J=0} J(x_1) \dots J(x_n). \quad (3.1.12)$$

Poredjenjem (3.1.12) i (3.1.10) sledi

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{i^n} \frac{\delta^{(n)} Z[J]}{\delta J(x_n) \dots \delta J(x_1)} \Big|_{J=0} \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}}}{\int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}}} . \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Grinove funkcije su generisane sa  $Z[J]$ . Dakle,

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n) . \quad (3.1.14)$$

Naglasimo još jednom da je

$$\langle \Omega | T \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}}}{\int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}}} . \quad (3.1.15)$$

U operatorskom formalizmu za n-tačkastu Grinovu funkciju dobija se (Gell-Mann-Low jednačina)

$$\langle \Omega | T \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T \hat{\phi}_I(x_1) \dots \hat{\phi}_I(x_n) e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_I} | 0 \rangle}{\langle 0 | T e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_I} | 0 \rangle} , \quad (3.1.16)$$

gde su operatori  $\phi_I$  u interakcionoj slici,  $\mathcal{H}_I$  je gustina Hamiltonijana interakcije u interakcionoj slici, a  $|0\rangle$  vakuum slobodne teorije.

Ako gustina Lagranžijana ima oblik

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) , \quad (3.1.17)$$

generalisani impuls je  $\pi = \dot{\phi}$ , pa je

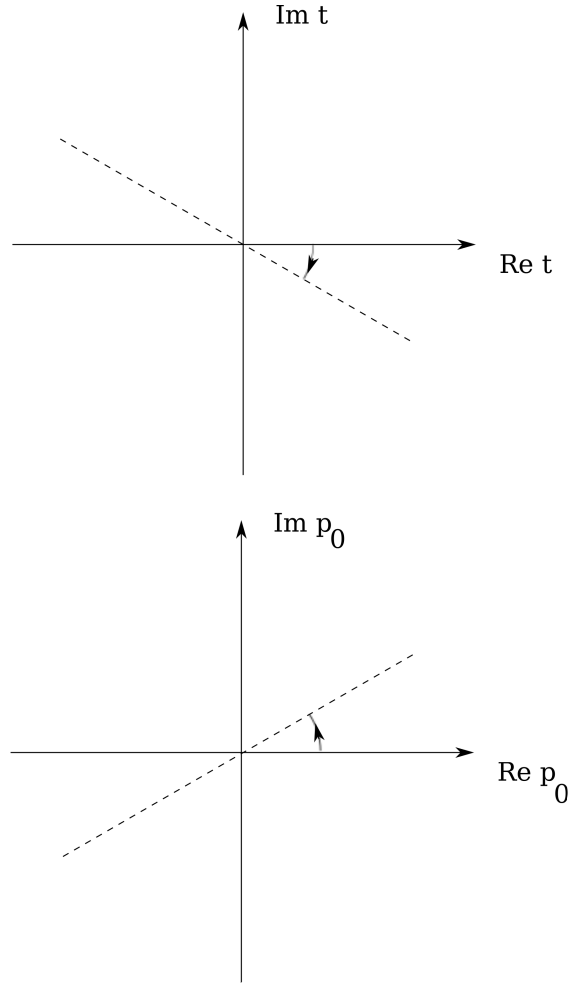
$$Z[J] = N \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x (\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) + J\phi)} . \quad (3.1.18)$$

Ovaj integral nije dobro definisan jer je podintegralna funkcija oscilatorna. Postoje dva načina da se ovaj integral dobro definiše, tj. da postane konvergentan. Prvi je prelazkom na euklidski prostor Vikovom rotacijom. Euklidske koordinate obeležavamo sa crtom. Veza izmedju euklidskih i Minkovskijevih koordinata je

$$\bar{x} = (\bar{x}^0, \bar{\mathbf{x}}) = (ix^0, \mathbf{x}) . \quad (3.1.19)$$

Elementi zapremine i kvadrati vektora koordinate u euklidskom i Minkovskijevom slučaju su povezani prema

$$\begin{aligned} d^4x &= -id^4\bar{x} \\ x^2 &= -\bar{x}^2 , \end{aligned}$$



Slika 3.1:

jer je  $\bar{x}^2 = (\bar{x}_0)^2 + \bar{\mathbf{x}}^2$ . Vikova rotacija u koordinatnom i u impulsnom prostoru vrše se na suprotne strane. To može da se vidi na više načina. Nulta komponenta impulsa, tj. energija je  $i\frac{\partial}{\partial t}$ , pa je

$$i\frac{\partial}{\partial t} = i\left(i\frac{\partial}{\partial \tau}\right). \quad (3.1.20)$$

Dakle  $p^0 = i\bar{p}^0$ , pa je euklidski impuls

$$\bar{\mathbf{p}} = (\bar{p}^0, \bar{\mathbf{p}}) = (-ip^0, \mathbf{p}). \quad (3.1.21)$$

Kvadrati impulsa su povezani prema  $p^2 = -\bar{p}^2$ . Proizvod nultih komponenti koordinate i impulsa se ne menja pri prelasku na Euklidski prostor. Skalarni proizvod izmedju koordinate i impulsa u ova dva prostora je

$$\begin{aligned} p_\mu x^\mu &= p^0 x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = \bar{p}^0 \bar{x}^0 - \bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{x}} \\ \bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{x}} &= \bar{p}^0 \bar{x}^0 + \bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{x}} = p^0 x^0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

Kinetički član se menja prema

$$(\partial_\mu \phi)^2 = (\partial_0 \phi)^2 - (\partial_i \phi)^2 = -(\bar{\partial}_0 \phi)^2 - (\bar{\partial}_i \phi)^2 = -(\bar{\partial}_\mu \phi)^2 . \quad (3.1.23)$$

Recimo na kraju da je euklidsko dejstvo,  $S_E$  dato sa

$$iS = i \int d^4x \mathcal{L} = -S_E . \quad (3.1.24)$$

Primenom gornjih pravila euklidski generišući funkcional je

$$\begin{aligned} Z_E[J] &= N_E \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4\bar{x} (-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) + J\phi)} \\ &= N_E \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{i}{\hbar} (S_E - \int d^4\bar{x} J\phi)} . \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

U integralu u eksponentu se po euklidskom vremenu  $\bar{x}^0$  integrirali od  $-\infty$  do  $\infty$ . Bez gubitka opštosti zbog stabilnosti teorije možemo uzeti  $V(\phi) \geq 0$ , pa je  $S_E > 0$ . Euklidske Grinove funkcije su

$$G_E^{(n)}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \frac{\delta^{(n)} Z_E[J]}{\delta J(\bar{x}_n) \dots \delta J(\bar{x}_1)} \Big|_{J=0} . \quad (3.1.26)$$

Drugi način da se funkcionalni integral definiše je da se gustini Lagranžijana doda imaginaran član  $+i\epsilon\phi^2/2$ . Generišući funkcional je onda

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x (\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} (m^2 - i\epsilon) \phi^2 - V(\phi) + J\phi)} . \quad (3.1.27)$$

Ovaj integral više nije oscilatoran i dobro je definisan.

## 3.2 Slobodno skalarno polje

Generišući funkcional slobodnog skalarnog polja je

$$Z_0[J] = N \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x (\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} (m^2 - i\epsilon) \phi^2 + J\phi)} . \quad (3.2.28)$$

Dejstvo

$$S_J = \frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) \left( -\square - (m^2 - i\epsilon) \right) \phi(x) + \int d^4x J(x) \phi(x) \quad (3.2.29)$$

uključuje interakciju skalarnog polja sa spoljašnjim izvorom  $J(x)$ . Variranjem ovog dejstva dobijamo

$$(\square + m^2 - i\epsilon) \phi_c = J . \quad (3.2.30)$$

Klasično polje  $\phi_c$  je rešenje klasične jednačine kretanja (u prisustvu izvora). Lako se vidi da je

$$\phi_c(x) = - \int d^4y \Delta_F(x-y) J(y) , \quad (3.2.31)$$

$$\begin{array}{c} \overline{x \quad y} \quad i\Delta_F(x-y) \\ \times \text{-----} \quad i \int J(x) d^4x \end{array}$$

Slika 3.2: Fajnmanova pravila za slobodno skalarno polje.

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= e^{\times \text{-----} \times} \\ &= 1 + \times \text{-----} \times + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \times \text{-----} \times \\ \times \text{-----} \times \end{array} + \frac{1}{3!} \begin{array}{c} \times \text{-----} \times \\ \times \text{-----} \times \\ \times \text{-----} \times \end{array} + \dots \end{aligned}$$

 Slika 3.3: Funkcional  $Z_0[J]$  za slobodno skalarno polje.

gde je  $i\Delta_F(x-y)$  Fajnmanov propagator definisan relacijom

$$(\square_x + m^2 - i\epsilon)\Delta_F(x-y) = -\delta^{(4)}(x-y) . \quad (3.2.32)$$

U funkcionalnom integralu ćemo napraviti smenom

$$\phi(x) = \phi_c(x) + \eta(x) , \quad (3.2.33)$$

gde je  $\eta(x)$  nova promenljiva. Funkcional  $Z_0[J]$  postaje

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= N \int \mathcal{D}\eta e^{i \int d^4x (\varphi_c + \eta) \left( -\frac{1}{2} \square - \frac{1}{2} (m^2 - i\epsilon) \right) (\phi_c + \eta)} e^{i \int d^4x (\phi_c + \eta) J} \\ &= N e^{i \int d^4x \frac{1}{2} \phi_c J} \int \mathcal{D}\eta e^{\frac{i}{2} \int d^4x \eta \left( -\square - (m^2 - i\epsilon) \right) \eta} \\ &= N \frac{1}{\sqrt{\det(-\square - (m^2 - i\epsilon))}} e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)} . \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

Konstantu normalizacije,  $N$  ćemo izabrati tako da je  $Z_0[0] = 1$ , pa je konačno

$$Z_0[J] = e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)} . \quad (3.2.35)$$

Ako uvedemo Fajnmanova pravila za Fajnmanov propagator, odnosno izvor kao na slici 3.2, generišući funkcional možemo predstaviti kao na slici 3.3. U drugom redu na slici 3.3 funkcional je razvijen u red. Dijagrami u drugom redu na slici 3.3 koji sadrže bar dva propagatora su nepovezani, dok je dijagram u eksponentu na slici 3.3 povezan. Ovo pravilo da uzimanjem eksponeta od povezanih dijagrama dobijamo sve dijagrame, važi sasvim generalno i pokazaćemo ga kasnije.

Do istog rezultata možemo doći primenom (2.0.5) gde je  $\rho = iJ$  i

$$A(x, y) = i(\square_x + m^2 - i\epsilon)\delta^{(4)}(x-y) . \quad (3.2.36)$$

Inverzni operator  $A^{-1}(x, y)$  operatora  $A(x, y)$  definisan je preko

$$\int d^4z A(x, z)A^{-1}(z, y) = \delta^{(4)}(x - y) . \quad (3.2.37)$$

Prećićemo u impulsni prostor

$$\begin{aligned} \int d^4x d^4y \phi(x)A(x, y)\phi(y) &= \int \frac{d^4p d^4q}{(2\pi)^8} \int d^4x d^4y \tilde{\phi}(p)e^{-ip \cdot x} A(x, y) \tilde{\phi}(q)e^{-iq \cdot y} \\ &= \int \frac{d^4p d^4q}{(2\pi)^8} \tilde{\phi}(p) \left( \int d^4x d^4y e^{-ip \cdot x} A(x, y) e^{-iq \cdot y} \right) \tilde{\phi}(q) \\ &= \int \frac{d^4p d^4q}{(2\pi)^8} \tilde{\phi}(p) \tilde{A}(-p, -q) \tilde{\phi}(q) . \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

U našem slučaju

$$\begin{aligned} \tilde{A}(-p, -q) &= \int d^4x d^4y e^{-ip \cdot x} A(x, y) e^{-iq \cdot y} \\ &= i(2\pi)^4 (-p^2 + m^2 - i\epsilon) \delta^{(4)}(p + q) . \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

Operator  $A$  u impulsnom prostoru nije diferencijalan operator. Inverzni operator  $A^{-1}$  u impulsnom prostoru je

$$\widetilde{A^{-1}}(p, q) = i(2\pi)^4 \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \delta^{(4)}(p + q) , \quad (3.2.40)$$

jer iz (3.2.37) sledi

$$\int d^4q \tilde{A}(p, q) \widetilde{A^{-1}}(-q, k) = (2\pi)^8 \delta^{(4)}(p + k) . \quad (3.2.41)$$

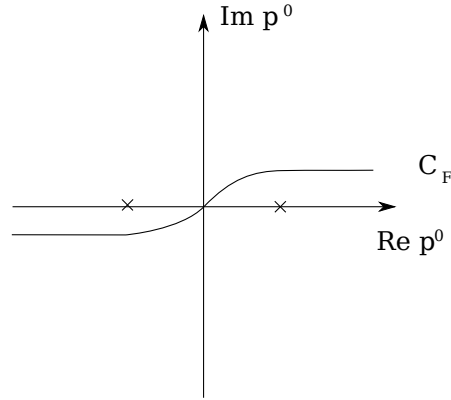
Inverzni operator se u koordinatnom prostoru lako dobija Furijeovom transformacijom

$$\begin{aligned} A^{-1}(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4p d^4q \widetilde{A^{-1}}(p, q) e^{-ip \cdot x - iq \cdot y} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x - y)} \\ &= -i \frac{1}{\square_x + m^2 - i\epsilon} \delta^{(4)}(x - y) \\ &= i\Delta_F(x - y) . \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

Onda se lako ponovo dobija (3.2.35).

Uradimo isti račun u euklidskom prostoru. Generišući euklidski funkcional je

$$\begin{aligned} Z_{0E}[J] &= N_E \int D\phi e^{-\int d^4\bar{x} (\frac{1}{2} \bar{\partial}_\mu \phi \bar{\partial}_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - J\phi)} \\ &= N_E \int D\phi e^{-\frac{1}{2} \int d^4\bar{x} d^4\bar{y} \phi(\bar{x}) (-\square_{\bar{x}} + m^2) \delta^{(4)}(\bar{x} - \bar{y}) \phi(\bar{y}) + \int d^4\bar{x} J\phi} . \end{aligned} \quad (3.2.43)$$



Slika 3.4:

Sada je

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = (-\square_x + m^2)\delta^{(4)}(\bar{x} - \bar{y})$$

Inverzni operator se nalazi analogno Minkovskijevom slučaju

$$A^{-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \int \frac{d^4\bar{p}}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i\bar{p}\cdot(\bar{y}-\bar{x})}}{\bar{p}^2 + m^2} = \Delta_E(\bar{y} - \bar{x}) ; \quad (3.2.44)$$

i on je dobro definisan jer podintegralna funkcija nema polove na realnoj osi  $\bar{p}^0$ . Takođe je

$$(-\square_x^E + m^2)\Delta_E(\bar{y} - \bar{x}) = \delta^{(4)}(\bar{y} - \bar{x}) . \quad (3.2.45)$$

Euklidski propagator možemo analitički produžiti pomoću Wickove rotacije. Tako imamo

$$\begin{aligned} \Delta_E &\rightarrow -i \int_{-i\infty}^{+i\infty} dp^0 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i[p^0(y^0-x^0)+\mathbf{p}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})]}}{-p^2 + m^2} \\ &= i \int_{-i\infty}^{+i\infty} dp^0 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip\cdot(y-x)}}{p^2 - m^2} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip\cdot(y-x)} \\ &= i\Delta_F(y-x) , \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

gde smo u drugom koraku napravili smenu  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ , a zatim smo konturu integracije rotirali kao na slici 3.4. Analitičkim produženjem euklidskog propagatora dobili smo propagator u prostoru Minkovskog.

Dakle euklidsko dejstvo za slobodno skalarno polje je

$$Z_{0E} = e^{\frac{1}{2} \int d^4\bar{x} d^4\bar{y} J(\bar{x})\Delta_E(\bar{x}-\bar{y})J(\bar{y})} . \quad (3.2.47)$$

U prethodnim poglavljima smo generišući funkcional uveli na primeru jednog skalarnog polja.

1 ————— 2

Slika 3.5: Dvotačkasta Grinova funkcija

Generalizacija na slučaj više skalarnih polja je prirodna. Ako sa  $\phi_a(x)$ ,  $a = 1, \dots, n$  obeležimo skup polja, a sa  $J^a(x)$  skup izvora onda je generišući funkcional

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}\phi e^{iS(\phi) + \int d^4x J^a \phi_a} , \quad (3.2.48)$$

gde je

$$D\phi = \prod_a D\phi_a \quad (3.2.49)$$

mera integracije. Ako imamo  $n$  slobodnih skalarnih polja

$$S = \frac{1}{2} \int dx dy \phi_a(x) K_{ab}(x, y) \phi_b(y) \quad (3.2.50)$$

onda je

$$Z[J] = e^{-\frac{i}{2} \int dx dy J^a(x) K_{ab}^{-1}(x, y) J^b(y)} . \quad (3.2.51)$$

### 3.3 Grinove funkcije za slobodno skalarno polje

Grinove funkcije dobijamo kao odgovarajući funkcionalni izvod generišućeg funkcionala. Dvotačkasta Grinova funkcija je

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} \\ &= i \Delta_F(x_1 - x_2) \\ &= \langle 0 | T \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (3.3.52)$$

Na slici 3.5 smo grafički predstavili Fajnmanov propagator  $i \Delta_F(x_1 - x_2)$ . Tro-tačkasta Grinova funkcija je

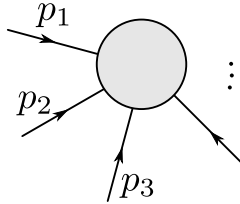
$$G^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = 0 , \quad (3.3.53)$$

dok je četvorotačkasta

$$\begin{aligned} G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -(\Delta_F(x_1 - x_2) \Delta_F(x_3 - x_4) \\ &+ \Delta_F(x_1 - x_3) \Delta_F(x_2 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_4) \Delta_F(x_2 - x_3)) \\ &= \langle 0 | T \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) | 0 \rangle \langle 0 | T \hat{\phi}(x_3) \hat{\phi}(x_4) | 0 \rangle \\ &+ \langle 0 | T \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_3) | 0 \rangle \langle 0 | T \hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}(x_4) | 0 \rangle \\ &+ \langle 0 | T \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_4) | 0 \rangle \langle 0 | T \hat{\phi}(x_3) \hat{\phi}(x_2) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}(x_3) \hat{\phi}(x_4) | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (3.3.54)$$

$$\begin{array}{c} 1 \text{-----} 2 \\ 3 \text{-----} 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \text{-----} 3 \\ 2 \text{-----} 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \text{-----} 4 \\ 2 \text{-----} 3 \end{array}$$

Slika 3.6: Četvorotačkasta Grinova funkcija



Slika 3.7: n-tačkasta Grinova funkcija.

Dobili smo Vikovu teoremu. Na slici 3.6 nacrtali smo četvero-tačkastu Grinovu funkciju.

Grinova  $n$ -tačkasta funkcije u impulsnom prostoru  $\tilde{G}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$  se definišu prema

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + \dots + p_n) \tilde{G}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \\ &= \int d^4x_1 \dots d^4x_n e^{i(p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n)} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) . \end{aligned} \quad (3.3.55)$$

$\delta$ - funkcija u prethodnom izrazu odražava homogenost prostor-vremena.  $n$ -tačkasta Grinova funkcija je prikazana na slici 3.7. Lako se nalazi

$$\tilde{G}^{(2)}(p, -p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} . \quad (3.3.56)$$

### 3.4 Interakciona teorija skalarnog polja- $\phi^4$ teorija

U prethodnom poglavlju analizirali smo slobodnu teoriju realnog skalarnog polja. Sada želimo da razmatramo teoriju u kojoj postoji interakcija. Vakuum-vakuum amplituda prelaza u prisustvu izvora  $Z[J] = \langle \Omega | \Omega \rangle_J$  je data funkcionalnim integralom

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} + J\phi)} . \quad (3.4.57)$$

Kako je

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} e^{i \int d^4y J\phi} = i\phi(x) e^{i \int d^4y J\phi} , \quad (3.4.58)$$

to je

$$Z[J] = N e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}} \left( -i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi)} , \quad (3.4.59)$$

odnosno

$$Z[J] = \frac{e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}} \left( -i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)} Z_0[J]}{e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}} \left( -i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)} Z_0[J] \Big|_{J=0}} . \quad (3.4.60)$$

Ova formula nam omogućava da nadjemo generišući funkcional preko funkcionala za slobodnu teoriju polja.

Mi ćemo ovde razmotriti  $\phi^4$  teoriju u kojoj je gustina Lagranžijana data sa

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4 . \quad (3.4.61)$$

Određimo generišući funkcional  $Z[J]$  primenom (3.4.60). Smatraćemo da je konstanta interakcije,  $\lambda$  mala i naćićemo  $Z$  perturbativno. Posebno ćemo naći brojilac i imenilac izraza (3.4.60). Brojilac je

$$\begin{aligned} \text{Brojilac} &= e^{-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4} e^{-\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J_1 \Delta_{12} J_2} \\ &= \left( 1 - i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 + \dots \right) e^{-\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J_1 \Delta_{12} J_2} , \end{aligned} \quad (3.4.62)$$

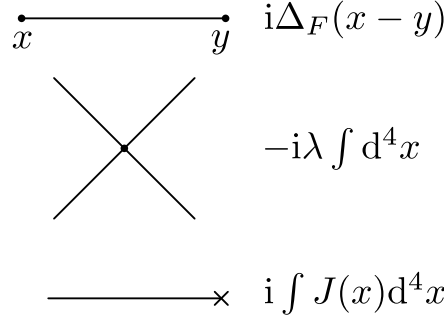
gde smo koristili skraćenice  $J_1 = J(x_1)$ ,  $\Delta_{12} = \Delta(x_1 - x_2)$  i  $J_2 = J(x_2)$ .

Da bismo našli brojilac potrebni su nam sledeći funkcionalni izvodi:

$$\begin{aligned} &\bullet \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} e^{-\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J_1 \Delta_{12} J_2} \\ &= - \int d^4x_2 \Delta(x - x_2) J(x_2) e^{-\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J_1 \Delta_{12} J_2} \\ &\bullet \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^2 e^{-\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J_1 \Delta_{12} J_2} \\ &= \left[ \left( \int d^4x_2 \Delta(x - x_2) J(x_2) \right)^2 + i \Delta(0) \right] e^{-\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J_1 \Delta_{12} J_2} \\ &\bullet \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 e^{-\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J_1 \Delta_{12} J_2} \\ &= \left[ - \left( \int d^4x_2 \Delta(x - x_2) J(x_2) \right)^3 \right. \\ &\quad \left. - 3i \Delta(0) \int d^4x_2 \Delta(x - x_2) J(x_2) \right] e^{-\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J_1 \Delta_{12} J_2} \\ &\bullet \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 e^{-\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J_1 \Delta_{12} J_2} \\ &= \left[ - 3(\Delta(0))^2 + \left( \int d^4x_2 \Delta(x - x_2) J(x_2) \right)^4 \right. \\ &\quad \left. + 6i \Delta(0) \left( \int d^4x_2 \Delta(x - x_2) J(x_2) \right)^2 \right] e^{-\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J_1 \Delta_{12} J_2} . \end{aligned} \quad (3.4.63)$$

$$1 + \frac{3}{4!} \bigcirc \bigcirc$$

Slika 3.8: Imenilac.



Slika 3.9: Fajnmanova pravila za  $\phi^4$  teoriju.

Prema tome

$$\begin{aligned} \text{Brojilac} = & \left[ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x [3(i\Delta(0))^2 + 6i\Delta(0) \left( \int d^4x_2 i\Delta(x-x_2) iJ(x_2) \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \int d^4x_2 i\Delta(x-x_2) iJ(x_2) \right)^4 \right] e^{-\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J_1 \Delta_{12} J_2} . \end{aligned} \quad (3.4.64)$$

Prvi član proporcionalan sa konstantom interakcije je tzv. vakuumski dijagram, dok preostali imaju izvore na krajevima. Imenilac je

$$\text{Imenilac} = 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x 3(i\Delta(0))^2 . \quad (3.4.65)$$

Imenilac predstavlja vakuumski dijagram (slika 3.8). Normalizacija generišućeg funkcionala uklanjanja vakuumski dijagram. Ovo pravilo važi generalno.

Generišući funkcional je onda

$$\begin{aligned} Z[J] = & \left[ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left( 6i\Delta_F(0) \left( \int dy_2 i\Delta(x-y_2) iJ(y_2) \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \int dy_2 i\Delta(x-y_2) iJ(y_2) \right)^4 \right) \right] e^{-\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J_1 \Delta_{12} J_2} . \end{aligned} \quad (3.4.66)$$

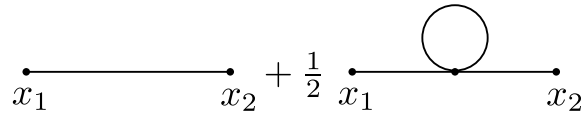
Fajnmanova pravila  $\phi^4$  teorije u koordinatnom prostoru su data na slici 3.9. Generišući funkcional,  $Z[J]$  je grafički predstavljen na slici 3.10.

Diferenciranjem  $Z[J]$  dobijamo Grinove funkcije (odnosno korelacione funkcije). Dvotačkasta Grinova funkcija je

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x_1, x_2) = & \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} = i\Delta_F(x_1 - x_2) \\ & - \frac{\lambda}{2} \Delta_F(0) \int d^4x \Delta_F(x - x_1) \Delta_F(x - x_2) + O(\lambda^2) \end{aligned}$$

$$\left( 1 + \frac{6}{4!} \times \text{---} \bigcirc \text{---} \times + \frac{1}{4!} \begin{array}{c} \times \text{---} \nearrow \times \\ \times \text{---} \searrow \times \end{array} \right) e^{\frac{1}{2} \times \text{---} \times}$$

Slika 3.10: Generišući funkcional  $Z[J]$



Slika 3.11: Dvo-tačkasta Grinova funkcija u koordinatnom prostoru.

4-tačkasta Grinova funkcija je definisana sa

$$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{i^4} \frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \Big|_{J=0} . \tag{3.4.67}$$

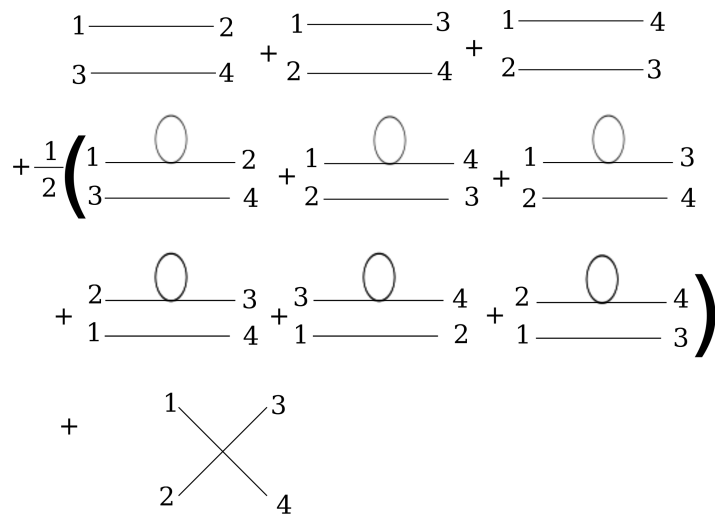
Ova funkcija je prikazana na slici 3.12.

Dvo-tačkasta Grinova funkcija u impulsnom prostoru je

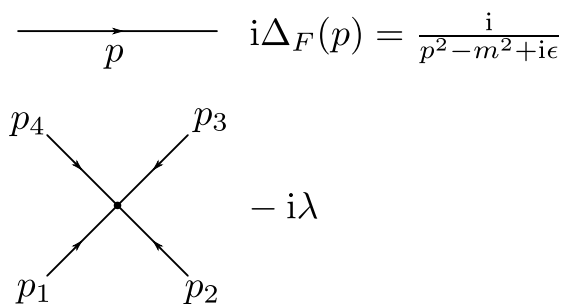
$$\begin{aligned} \tilde{G}^{(2)}(p, -p) &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &- \frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)^2 \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} . \end{aligned} \tag{3.4.68}$$

Fajnmanaova pravila u impulsnom prostoru data su na slici 3.13. Dvo-tačkasta Grinova funkcija u impulsnom prostoru prikazana je na slici 3.14. Svaki dijagram ima odgovarajući faktor simetrije. Faktor simetrije dijagrama smo dobili računski u ovom poglavlju. Faktor simetrije dijagrama označava broj ekvivalentnih načina da se izvrši data kontrakcija, i može se tako odrediti. Daćemo dva primera. Odredimo faktor simetrije za dijagrame sa slike 3.15. Prvi dijagram se dobija iz člana prvog reda

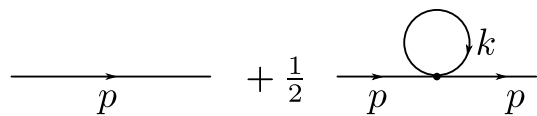
$$-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4 x \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) \phi^4(x) | 0 \rangle . \tag{3.4.69}$$



Slika 3.12: Četvorotačkasta Grinova funkcija



Slika 3.13: Fajnmannova pravila za  $\varphi^4$  teoriju u impulsnom prostoru.



Slika 3.14: Dvotačkasta Grinova funkcija u impulsnom prostoru.



Slika 3.15: Faktor simetrije

$$Z[J] = 1 + \text{---}\bullet\text{---} + \frac{1}{2} \text{---}\bullet\text{---} + \frac{1}{6} \text{---}\bullet\text{---} + \dots$$

Slika 3.16: Grafički  $Z[J]$ 

$$iW[J] = \text{---}\circ\text{---} + \frac{1}{2} \text{---}\circ\text{---} + \frac{1}{6} \text{---}\circ\text{---} + \dots$$

Slika 3.17: Grafički  $iW[J]$ 

Faktor simetrije je onda

$$S^{-1} = \frac{1}{4!} 4 \cdot 3 = \frac{1}{2}. \quad (3.4.70)$$

Drugi dijagram se dobija iz

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int dx dy \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) \phi^4(x) \phi^4(y) | 0 \rangle. \quad (3.4.71)$$

Faktor simetrije za ovaj dijagram je

$$S^{-1} = \left( \frac{1}{4!} \right)^2 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{1}{6}. \quad (3.4.72)$$

Na kraju ovog poglavlja, na slici 3.16 izraz (3.1.14) za generišući funkcional smo grafički predstavili. Prvi član je jednak jedinici jer smo normirali funkcional. Sledeći član je linearan po izvoru, itd.

## 3.5 Povezane Grinove funkcije

Dijagrami u prva tri reda na slici 3.12 su nepovezani, dok je poslednji dijagram povezan. Slično dijagrami na slici 3.11 su povezani. Nepovezni dijagrami su sastavljeni od povezanih. Povezani dijagrami su relevantni za određivanje amplituda prelaza u procesima.

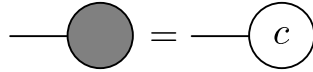
Generišući funkcional za povezane Grinove funkcije  $iW[J]$  je definisan sa

$$Z[J] = e^{iW[J]}. \quad (3.5.73)$$

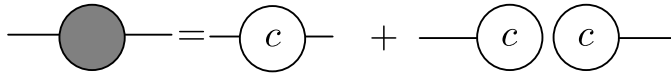
Dakle, funkcional  $Z[J]$  definiše sve Grinove funkcije, i povezane i nepovezane, dok funkcional  $W[J]$  samo povezane. Zbog normalizacije  $Z[J=0] = 1$  je  $W[0] = 0$ . Grafički generišući funkcional  $iW[J]$  je prikazan na slici 3.17. Povezane Grinove funkcije obeležavamo slovom  $c$ .

Proizvoljan dijagram se sastoji od povezanih dijagrama. Neka je  $C_I$  povezani dijagram koji se  $n_I$  puta pojavljuje u dijagramu  $D$ . Dijagram  $D$  je proizvod povezanih dijagrama  $n_I$ . Tada je

$$D = \prod_I \frac{1}{n_I!} (C_I)^{n_I}, \quad (3.5.74)$$



Slika 3.18:



Slika 3.19:

gde je  $n_I!$  faktor simetrije dijagrama  $C_I$  kao celine unutar dijagrama  $D$ . Generišući funkcional  $Z[J]$  je onda

$$Z \sim \sum_{\{n_I\}} D, \quad (3.5.75)$$

odnosno

$$Z \sim \prod_I \sum_{n_I=0}^{\infty} \frac{1}{n_I!} (C_I)^{n_I} \quad (3.5.76)$$

Kombinujući prethodne izraze dobijamo

$$Z = e^{\sum_I C_I}. \quad (3.5.77)$$

Ovim smo pokazali formulu (3.5.73).

Povezane Grinove funkcije  $G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  računaju se prema

$$\begin{aligned} G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{i^n} \frac{\delta^{(n)} iW[J]}{\delta J(x_n) \dots \delta J(x_1)} \Big|_{J=0} \\ &= \langle \Omega | T \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) | \Omega \rangle_c. \end{aligned} \quad (3.5.78)$$

Za slobodno skalarno polje generišući funkcional povezanih Grinovih funkcija je

$$iW_0[J] = -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y), \quad (3.5.79)$$

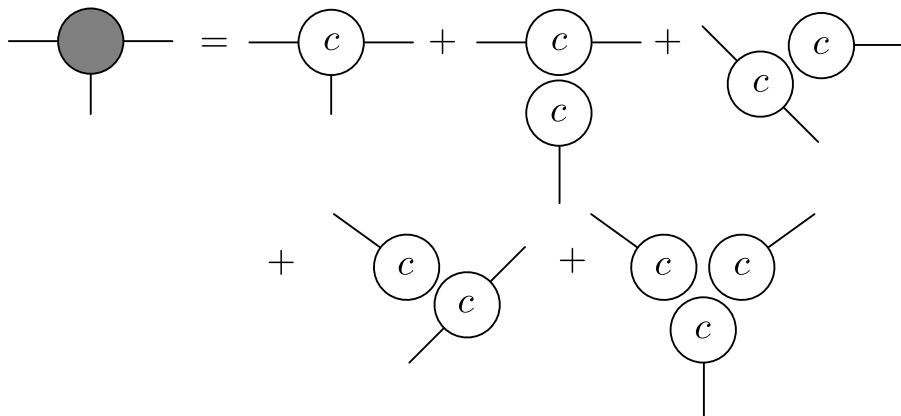
pa je

$$G_c^{(2)}(x_1, x_2) = i\Delta_F(x_1 - x_2) \quad (3.5.80)$$

dok su ostale povezane Grinove funkcije jednake nuli.

Puna jedno-tačkasta Grinova funkcija se poklapa sa odgovarajućom povezanom funkcijom. Ova funkcija predstavlja vakuumsku očekivanu vrednost polja i naziva se "punoglavcem" (engleski: tadpole). Prikazali smo je na slici 3.18. Povezane dijagrame označavamo sa indeksom  $c$ , dok su pune Grinove funkcije šrafirane. Dvo-tačkasta puna Grinova funkcija je data na slici 3.19. Veza između povezanih tro-tačkastih Grinovih funkcija je data na slici 3.20.

Na slici 3.21 smo predstavili generišući funkcional  $Z[J]$  preko povezanih Grinovih funkcija, u saglasnosti sa relacijom (3.5.73).



Slika 3.20:

$$\begin{aligned}
 Z[J] = & 1 + \text{circle}(c) \text{ with } \rightarrow \text{ and } \downarrow + \frac{1}{2} \left( \text{circle}(c) \text{ with } \leftarrow \text{ and } \rightarrow + \text{circle}(c) \text{ with } \leftarrow \text{ and } \rightarrow \text{ and } \text{circle}(c) \text{ with } \rightarrow \text{ and } \leftarrow \right) \\
 & + \frac{1}{6} \left( \text{circle}(c) \text{ with } \leftarrow \text{ and } \rightarrow \text{ and } \downarrow + 3 \cdot \text{circle}(c) \text{ with } \leftarrow \text{ and } \rightarrow \text{ and } \text{circle}(c) \text{ with } \downarrow \right) + \dots
 \end{aligned}$$

Slika 3.21: Funkcional  $Z[J]$  preko povezanih Grinovih funkcija.

$$iW[0] = \text{●} = \text{○} + \text{⊗} + \dots$$

Slika 3.22:

Recimo na kraju da smo funkcionalne  $Z[J]$  i  $iW[J]$  normirali tako da je  $Z[0] = 1$ , tj.  $iW[0] = 0$ . To smo uradili rukom. Vakuumska energija  $\langle \Omega | \Omega \rangle$  u slobodnoj teoriji polja jednaka je jedinici. Medjutim u interakcionoj teoriji ona je faza  $e^{i\gamma}$ . Našim izborom normalizacije mi smo "uklonili" fazu. Na slici 3.22 prikazali smo vakuumske dijagrame u teoriji koja sadži  $\phi^3$  i  $\phi^4$  interakciju. Da smo generišući funkcional  $Z[J]$  definisali bez normalizacionog faktora  $N$ , tj.

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi)}, \quad (3.5.81)$$

tada bi funkcional  $Z[J]/Z[0]$  generisao Grinove funkcije.

# Glava 4

## Efektivno dejstvo i verteksne funkcije

U ovom poglavlju uvećemo još jedan funkcional, efektivno dejstvo, koje generiše jednočestične ireducibilne (1PI) dijagrame. Zatim ćemo izložiti metod pozadinskog polja, i u poslednjem poglavlju naćićemo vezu izmedju povezanih i 1PI dijagrama.

### 4.1 Efektivno dejstvo

Klasićno (ili srednje) polje definišemo sa

$$\varphi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} . \quad (4.1.1)$$

Dalje je

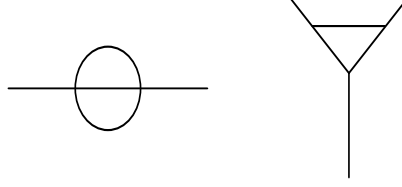
$$\begin{aligned} \varphi_c(x) &= \frac{1}{i} \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi)}}{\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi)}} \\ &= \frac{\langle \Omega | \hat{\phi}(x) | \Omega \rangle_J}{\langle \Omega | \Omega \rangle_J} . \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Dakle, klasićno polje je vakuumska oćekivana vrednost operatora polja  $\hat{\phi}$  u prisustvu izvora i ono je istovremeno i polje i funkcional

$$\varphi_c = \varphi_c(x, J(x)) . \quad (4.1.3)$$

Ova relacija se moće invertovati, tj. moćemo struju da izrazimo preko klasićnog polja  $J = J(\varphi_c)$ . Efektivno dejstvo je Ležandrova transformacija funkcionala povezanih Grinovih funkcija

$$\Gamma[\varphi_c] = W[J] - \int d^4x J(x) \varphi_c(x) , \quad (4.1.4)$$



Slika 4.1: 1PI dijagrami.

gde je  $J$  izraženo preko klasičnog polja. Drugim rečima  $\delta\Gamma[\varphi_c]/\delta J = 0$ , tj. efektivno dejstvo zavisi od klasičnog polja. Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(y)} &= \frac{\delta W[J]}{\delta\varphi_c(y)} - \int d^4x \frac{\delta J(x)}{\delta\varphi_c(y)} \varphi_c(x) - J(y) \\ &= \frac{\delta W[J]}{\delta\varphi_c(y)} - \int d^4x \frac{\delta J(x)}{\delta\varphi_c(y)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} - J(y) \\ &= -J(y). \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Nadjimo efektivno dejstvo za slobodnu teoriju skalarnog polja. Klasično polje je

$$\varphi_c(x) = \frac{\delta W_0[J]}{\delta J(x)} = - \int d^4y \Delta_F(x-y) J(y) \quad (4.1.6)$$

i ono zadovoljava klasičnu jednačinu kretanja

$$(\square_x + m^2)\varphi_c(x) = J(x). \quad (4.1.7)$$

Efektivno dejstvo je

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi_c] &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) - \int d^4x J \varphi_c \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \varphi_c (\square_x + m^2) \varphi_c \\ &= S. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

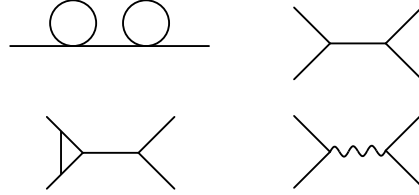
Efektivno dejstvo za slobodnu teoriju poklapa se sa klasičnim dejstvom. U interakcionoj teorije efektivno dejstvo

$$\Gamma = S + \text{kvantne popravke}$$

je generalizacija klasičnog dejstva; zato se još naziva i kvantno dejstvo. Jednočestični ireducibilni (1PI) dijagrami su povezani dijagrami koji se presecanjem jedne unutrašnje linije ne mogu podeliti na dva dijagrama. Dijagrami na slici 4.1 su jednočestični ireducibilni dijagrami. Dijagrami prikazani na slici 4.2 su primeri za reducibilne dijagrame.

Efektivno dejstvo je generišući funkcional za jednočestične ireducibilne dijagrame (1PI)

$$\Gamma[\varphi_c] = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \varphi_c(x_1) \dots \varphi_c(x_n). \quad (4.1.9)$$



Slika 4.2: Reducibilni dijagrami.

1PI dijagrami sa  $n$  spoljašnjih linija su

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_c(x_1) \dots \delta \varphi_c(x_n)} \Big|_{\varphi_c=0}. \quad (4.1.10)$$

Furijeovom transformacijom dobijamo 1PI dijagrame u impulsnom prostoru

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + \dots + p_n) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \\ = & \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n e^{i(p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n)} \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Jednočestični ireducibilni dijagrami za  $n > 2$  se nazivaju verteksnim dijagramima.

Za slobodnu teoriju skalarnog polja je

$$\Gamma^{(2)}(x_1, x_2) = -(\square + m^2 + i\epsilon) \delta^{(4)}(x_1 - x_2) \quad (4.1.12)$$

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p, -p) = p^2 - m^2 + i\epsilon = \Delta_F^{-1}(p). \quad (4.1.13)$$

## 4.2 Background field method

Neka je  $\phi_a$  skup polja, a  $J^a$  odgovarajući izvori. Vakuurno-vakuurno amplituda prelaza u prisustvu izvora je

$$Z[J] = e^{iW[J]} = N \int \mathcal{D}\phi_a e^{iS(\phi) + i \int d^4 x J^a \phi_a}. \quad (4.2.14)$$

Koristeći definiciju efektivnog dejstva imamo

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar} \Gamma[\varphi]} &= e^{\frac{i}{\hbar} (W[J] - \int d^4 x J^a \varphi_a)} \\ &= N \int \mathcal{D}\phi_a e^{\frac{i}{\hbar} (S[\phi] + \int d^4 x J^a (\phi_a - \varphi_a))} \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Klasična polja obeležili smo sa  $\varphi_a$ . Klasično dejstvo ćemo razviti oko klasične konfiguracije:

$$S(\phi) = S(\varphi) + \int dx \frac{\delta S}{\delta \phi_a} \Big|_{\varphi} (\phi_a - \varphi_a) \quad (4.2.16)$$

$$+ \frac{1}{2} \int dx dy \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_b(y)} \Big|_{\varphi} (\phi_a(x) - \varphi_a(x)) (\phi_b(y) - \varphi_b(y)) + \dots \quad (4.2.17)$$

Jednačina (ovo je kvantna jednačina kretanja)

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_a(x)} = -J^a(x) , \quad (4.2.18)$$

se u najnižem redu svodi na

$$\frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi_a(x)} = -J^a(x) . \quad (4.2.19)$$

Zamenom (4.2.19) i (4.2.16) u (4.2.15) imamo

$$e^{\frac{i}{\hbar}\Gamma[\varphi]} = e^{\frac{i}{\hbar}S[\varphi]} \int D\tilde{\varphi}_a e^{\frac{i}{2\hbar} \int dx dy \tilde{\varphi}_a(x) S_{ab}(x,y) \tilde{\varphi}_b(y)} , \quad (4.2.20)$$

gde je

$$S_{ab}(x,y) = \left. \frac{\delta^2 S}{\delta\phi_a(x)\delta\phi_b(y)} \right|_{\varphi} . \quad (4.2.21)$$

Polazna polja  $\phi_a$  smo dekomponovali na klasična polja  $\varphi_a$  (background field) i kvantna polja  $\tilde{\varphi}_a$ , tj.

$$\phi_a = \varphi_a + \tilde{\varphi}_a . \quad (4.2.22)$$

U funkcionalnom integralu integralimo po kvantnim poljima. Jakobijan transformacije je 1. Uvodeći smenu

$$\varphi'_a = \sqrt{\hbar}\tilde{\varphi}_a \quad (4.2.23)$$

dobijamo

$$\Gamma[\varphi] = S[\varphi] + \frac{i\hbar}{2} \text{trln} S_{ab} + \dots . \quad (4.2.24)$$

Prvi član je klasično dejstvo; naredni član je one-loop kvantna korekcija efektivnog dejstva. Ona je reda  $\hbar$ . Sledeći član bi bio reda  $\hbar^2$  sadržao bi dve petlje (two-loops diagram). Razvoj po petljama je razvoj po stepenima  $\hbar$ .

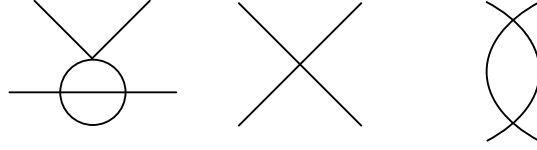
Plankova konstanta  $\hbar$  meri kvantnu prirodu dijagrama. Sada ćemo vratiti Plankovu konstantu u račun. Gustina Lagranžijana ima oblik

$$\mathcal{L} = \phi_i \Delta_{ij}^{-1} \phi_j + \mathcal{L}_{int} . \quad (4.2.25)$$

Jasno je da se verteksi množe sa  $1/\hbar$ , a propagatori sa  $\hbar$ . Broj petlji dijagrama (broj nezavisnih impulsa po kojima integralimo) je

$$L = I - V + 1 ,$$

gde je  $I$  broj unutrašnjih linija, a  $V$  broj verteksa. Ukupni  $\hbar$  faktor 1PI dijagrama je  $\hbar^{I-V} = \hbar^{L-1}$ . Razvoj po stepenima  $\hbar$  je razvoj po petljama.  $\hbar$  faktor dijagrama povezanih Grinovih funkcija  $G_c$  je  $\hbar^{E+I-V} = \hbar^E \hbar^{L-1}$ , gde je  $E$  broj spoljnih linija dijagrama. Na slici 4.3 prikazali smo tri četvorotačkaste Grinove funkcije. Za prvu je  $E = 4, I = 4$  i  $V = 3$ , pa je za ovaj dijagram  $L = 2$ . On je dijagram sa dve petlje. Ukupni  $\hbar$  faktor ovog dijagrama je  $\hbar^4 \hbar^{2-1}$ . Drugi dijagram sa ove slike je takodje četvoro-tačkasta Grinova funkcija, za nju je  $L = 0$ . Poslednja četvoro-tačkasta Grinova funkcija je sa jednom petljom, jer je za nju  $L = 1$ .



Slika 4.3: Kvantna priroda dijagrama.

$$\Gamma^{(2)}(x_1, x_2) = i \left( \text{---} \bigcirc \text{---} \right)^{-1}$$

Slika 4.4: Veza između povezane dvo-tačkaste Grinive funkcije i dvo tačkaste 1PI Grinove funkcije.

### 4.3 Veza između povezanih i 1PI Grinovih funkcija

Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} \delta^{(4)}(x_1 - x_2) &= \frac{\delta\varphi_c(x_1)}{\delta\varphi_c(x_2)} \\ &= \int d^4x \frac{\delta\varphi_c(x_1)}{\delta J(x)} \frac{\delta J(x)}{\delta\varphi_c(x_2)} \\ &= - \int d^4x \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x)} \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x)\delta\varphi_c(x_2)}. \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

Iz ovog izraza vidimo da je

$$\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x)} = - \left( \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x)\delta\varphi_c(x_2)} \right)^{-1}. \quad (4.3.27)$$

Ako uzmemo da je  $J = 0$  i ukoliko nema spontanog narušenja simetrije, onda je  $\varphi_c = 0$  pa dobijamo

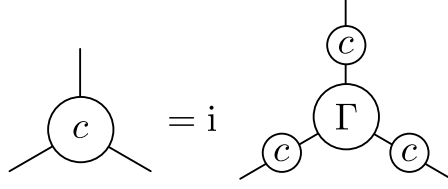
$$- \int d^4x i G_c^{(2)}(x_1, x) \Gamma^{(2)}(x, x_2) = \delta^{(4)}(x_1 - x_2). \quad (4.3.28)$$

Dakle,

$$\Gamma^{(2)}(x_1, x_2) = i (G_c^{(2)}(x_1, x_2))^{-1}. \quad (4.3.29)$$

Ova veza između dvo-tačkaste Grinive funkcije i dvo-tačkaste 1PI Grinove funkcije prikazana je na slici 4.4.

1PI Grinova funkcija  $\Gamma^{(2)}$  jednaka je inverznom propagatoru (do na faktor  $i$ ). Diferenciranjem



Slika 4.5: Veza između povezane tro-tačkaste Grinive funkcije i tro -tačkaste 1PI Grinove funkcije.

(4.3.26) po  $J(x_3)$  dobijamo

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta}{\delta J(x_3)} \int d^4x \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x)} \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(x) \delta \varphi(x'_2)} \\
&= \int d^4x \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x_3) \delta J(x_1) \delta J(x)} \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(x) \delta \varphi(x'_2)} \\
&+ \int d^4x'_1 \int d^4x'_3 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x'_1)} \frac{\delta^3 \Gamma[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(x'_3) \delta \varphi_c(x'_1) \delta \varphi_c(x'_2)} \frac{\delta \varphi_c(x'_3)}{\delta J(x_3)}.
\end{aligned}$$

Množenjem poslednje relacije sa

$$\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x'_2) \delta J(x_2)} \tag{4.3.30}$$

i integracijom po  $x'_2$  dobijamo

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x_3) \delta J(x_2) \delta J(x_1)} \\
&= \int d^4x'_1 d^4x'_2 d^4x'_3 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x'_1)} \\
&\times \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_2) \delta J(x'_2)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_3) \delta J(x'_3)} \frac{\delta^3 \Gamma[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(x'_1) \delta \varphi_c(x'_2) \delta \varphi_c(x'_3)}.
\end{aligned} \tag{4.3.31}$$

U limesu  $J \rightarrow 0$  i  $\varphi_c \rightarrow 0$  dobijamo

$$\begin{aligned}
G_c^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= i \int d^4x'_1 d^4x'_2 d^4x'_3 G_c^{(2)}(x_1, x'_1) G_c^{(2)}(x_2, x'_2) \\
&\times G_c^{(2)}(x_3, x'_3) \Gamma^{(3)}(x'_1, x'_2, x'_3).
\end{aligned} \tag{4.3.32}$$

Grafički ova relacija je prikazana na slici 4.5.

Dodavanjem jednog propagatora na svaku spoljnu nogu verteksne funkcije dobijamo povezanu 3-tačkastu Grinovu funkciju. Slično se dobija i inverzna relacija

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= -i \int d^4x'_1 d^4x'_2 d^4x'_3 (G_c^{(2)}(x_1, x'_1))^{-1} (G_c^{(2)}(x_2, x'_2))^{-1} \\
&\times (G_c^{(2)}(x_3, x'_3))^{-1} G_c^{(3)}(x'_1, x'_2, x'_3).
\end{aligned} \tag{4.3.33}$$

$$i \Gamma = c$$

Slika 4.6: Veza između povezane tro-tačkaste Grinive funkcije i tro -tačkaste 1PI Grinove funkcije.

$$c = i \Gamma + i^2 \left[ \Gamma - \Gamma \right] + \dots$$

Slika 4.7: Veza između povezane 4–point Grinove funkcije i verteksnih funkcija.

Ova relacija je grafički prikazana na slici 4.6

Amputiranjem (uklanjanjem spoljnjih propagatora tj. množenjem sa inverznim propagatorima) povezane 3-tačkaste Grinove funkcije dobija se 3-tačkasta verteksna funkcija.

Veza između povezane 4–point Grinove funkcije i verteksnih funkcija  $\Gamma^{(4)}$  i  $\Gamma^{(3)}$  je data na slici 4.7.



# Glava 5

## Švinger-Dajsonove jednačine i Vordovi identiteti

Prvi deo ove glave posvećen je Švinger-Dajsonovim jednačinama koje predstavljaju veze između Grinovih funkcija. Uloga simetrije u kvantnoj teoriji se ispoljava preko Vordovih identiteta. Vordovi identiteti također, iz simetrijskih razloga nameću uslove na Grinove funkcije.

### 5.1 Švinger-Dajsonove jednačine

U klasičnoj teoriji polja jednačine kretanja dobijamo iz uslova stacionarnosti dejstva pri transformacijama polja

$$\phi_a(x) \rightarrow \phi'_a(x) = \phi_a(x) + \delta\phi_a(x) . \quad (5.1.1)$$

U kvantnoj teoriji ćemo ispitati kako ove transformacije menjaju generišući funkcional

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}\phi e^{iS(\phi) + \int d^4x J^a \phi_a} , \quad (5.1.2)$$

gde je

$$\mathcal{D}\phi = \prod_a \mathcal{D}\phi_a .$$

Smena (5.1.1) ne menja meru integracije

$$\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi , \quad (5.1.3)$$

pa je

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\phi' e^{iS[\phi'] + i \int d^4x J^a \phi'_a} &= \int \mathcal{D}\phi e^{i(S[\phi] + \int d^4x \frac{\delta S}{\delta \phi_a} \delta\phi_a + \dots) + i \int d^4x J^a (\phi_a + \delta\phi_a)} \\ &= \int \mathcal{D}\phi \left[ 1 + i \int d^4x \left( \frac{\delta S}{\delta \phi_a} + J_a \right) \delta\phi_a \right] e^{iS[\phi] + i \int d^4x J^a \phi_a} , \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

odakle je

$$\int \mathcal{D}\phi \int d^4x \left( \frac{\delta S}{\delta \phi_a} + J_a \right) \delta\phi_a e^{iS[\phi] + i \int d^4x J^a \phi_a} = 0 . \quad (5.1.5)$$

Kako su varijacije  $\delta\phi_a$  proizvoljne to je

$$\int \mathcal{D}\phi \left( \frac{\delta S}{\delta\phi_a} + J_a \right) e^{iS[\phi] + i \int d^4x J^a \phi_a} = 0 . \quad (5.1.6)$$

Iz (5.1.6) vidimo da klasične jednačine kretanja važe kao vakumske očekivane vrednosti. (5.1.6) možemo prepisati u obliku

$$\left( \frac{\delta S}{\delta\phi_a} \Big|_{\phi_a = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_a}} + J_a \right) Z[J] = 0 \quad (5.1.7)$$

(5.1.5), (5.1.6) i (5.1.7) su Švinger-Dajsonove jednačine. Diferenciranjem (5.1.5) po  $J_{a_1}(x_1)$  i uzimanjem  $J = 0$  dobijamo

$$\int \mathcal{D}\phi \frac{\delta S}{\delta\phi_a} i\phi_{a_1}(x_1) e^{iS} = - \int D\phi \delta_{aa_1} \delta^{(4)}(x - x_1) e^{iS} \quad (5.1.8)$$

tj.

$$\langle T \frac{\delta S}{\delta\phi_a} \phi_{a_1}(x_1) \rangle_* = i\delta_{aa_1} \delta^{(4)}(x - x_1) , \quad (5.1.9)$$

gde \* znači da svi prostorno vremenski izvodi su van vremenskog uredjenja.

Za slobodno skalarno polje

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \phi (\square + m^2) \phi \quad (5.1.10)$$

dobijamo

$$(\square_x + m^2) \langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x_1) | 0 \rangle = -i\delta^{(4)}(x - x_1) . \quad (5.1.11)$$

Ukoliko je prisutna interakcija

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \phi (\square + m^2) \phi - \int d^4x V(\phi) , \quad (5.1.12)$$

onda dobijamo

$$(\square_x + m^2) \langle \Omega | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x_1) | \Omega \rangle = -\langle \Omega | T V'(\hat{\phi}(x)) \hat{\phi}(x_1) | \Omega \rangle - i\delta^{(4)}(x - x_1) \quad (5.1.13)$$

odnosno

$$(\square_x + m^2) \langle \Omega | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x_1) | \Omega \rangle = \langle \Omega | T (\square_x + m^2) \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x_1) | \Omega \rangle - i\delta^{(4)}(x - x_1) \quad (5.1.14)$$

U funkcionalnom formalizmu vremensko uredjenje izraza  $\mathcal{F}$  definisano je sa

$$\langle T \mathcal{F}(\phi) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{F}(\phi) e^{iS}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS}} . \quad (5.1.15)$$

Ovako definisano vremensko uredjenje je kovarijantno i ne poklapa se uvek sa vremenskim uredjenjem definisanim u okviru operatorskog formalizma. Daljim diferenciranjem dolazimo do

$$\begin{aligned} & \langle T \frac{\delta S}{\delta\phi_a} \phi_{a_1}(x_1) \dots \phi_{a_n}(x_n) \rangle \\ &= i \sum_{j=1}^n \langle \Omega | T \phi_{a_1}(x_1) \dots \delta_{aa_j} \delta^{(4)}(x - x_j) \dots \phi_{a_n}(x_n) | \Omega \rangle . \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

Ovaj izraz je takodje poznat kao Švinger-Dajsonova jednačina. Članovi sa delta funkcijama su tzv. kontakti članovi. Vidimo da klasične jednačine važe sa kvantnim poljima unutar korelacionih funkcija, ali samo u kada se koordinata  $x$  ne poklapa sa koordinatama  $x_1, \dots, x_n$ .

Iste rezultate dobijamo polazeći od (5.1.7). Diferenciranjem ove jednačine po  $J_{a_1}$  i uzimanjem  $J = 0$  dobijamo (5.1.9). Diferenciranjem po  $J_{a_1}(x_1)$  i  $J_{a_2}(x_2)$  i uzimanjem  $J = 0$  dobijamo

$$\begin{aligned} \langle T \frac{\delta S}{\delta \phi_a} \phi_{a_1}(x_1) \phi_{a_2}(x_2) \rangle &= i \langle \Omega | \phi_{a_2}(x_2) | \Omega \rangle \delta_{aa_1} \delta^{(4)}(x - x_1) \\ &+ i \langle \Omega | \phi_{a_1}(x_1) | \Omega \rangle \delta_{aa_2} \delta^{(4)}(x - x_2) , \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

što je specijalni slučaj (5.1.16).

## 5.2 Vordovi identiteti

U ovom poglavlju govorićemo o kvantnoj generalizaciji Neterine teoreme koju smo pokazali na KTP1. Pri infinitezimalnim kontinualnim transformacijama polja se menjaju prema

$$\phi_a(x) \rightarrow \phi'_a(x) = \phi_a(x) + \delta_0 \phi_a(x) , \quad (5.2.1)$$

gde je  $\delta_0 \phi_a(x)$  varijacije forme polja. Pri ovoj transformaciji promena gustine lagranžijana je

$$\delta_0 \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta_0 \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \partial_\mu (\delta_0 \phi_a) . \quad (5.2.2)$$

Ako je varijacija lagranžijana oblika  $\delta_0 \mathcal{L} = \partial_\mu f^\mu$ , dejstvo će biti invarijantno na transformacije (5.2.1). Izraz  $f^\mu$  zavisi od polja i izvoda polja i moramo ga u svakoj konkretnoj situaciji odrediti. Parametre transformacija obeležimo sa  $\epsilon_s$ , gde je  $s$  indeks grupe simetrije. Varijacija forme polja je oblika

$$\delta_0 \phi_a = \epsilon_s \Omega_{as}(\phi, \partial \phi) . \quad (5.2.3)$$

Npr. za Lorencove transformacije je

$$\delta_0 \phi = -\frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} (x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu) \phi . \quad (5.2.4)$$

U ovom izrazu parametri su  $\omega^{\mu\nu}$ , dok je  $\Omega_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu) \phi$ .

Izraz  $f^\mu$  je oblika  $f_s^\mu \epsilon_s$ . Pretpostavimo sada da parametri transformacija  $\epsilon_s$  nisu konstante već zavise od  $x$ , tj.  $\delta_0 \phi_a = \epsilon_s(x) \Omega_{as}(\phi, \partial \phi)$ . Promena gustine lagranžijana pri ovakvim, lokalnim transformacijama je

$$\delta_0 \mathcal{L} = \epsilon_s(x) \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \Omega_{sa} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \partial_\mu \Omega_{sa} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \Omega_{sa} \partial_\mu \epsilon_s(x) . \quad (5.2.5)$$

Poslednji član u slučaju da su parametri  $\epsilon_s$  konstantni je jednak nuli, dok je prvi član je oblika  $\epsilon_s \partial_\mu f_s^\mu$ . Prema tome promena dejstva je

$$\delta S = - \int d^4 x \epsilon_s \partial_\mu j_s^\mu + \int d^4 x \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \epsilon_s \Omega_{sa} \right) \quad (5.2.6)$$

gde je

$$j_s^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \Omega_{sa} - f_s^\mu \quad (5.2.7)$$

Neterina struja. Ako funkcije  $\epsilon_s(x)$  u beskonačnosti opadaju u nulu tada možemo odbaciti poslednji član u (5.2.6). Tako dobijamo

$$\delta S = - \int d^4x \epsilon_s \partial_\mu j_s^\mu . \quad (5.2.8)$$

Ukoliko je klasična teorija invarijantna, tj. ukoliko je  $\delta S = 0$  tada dobijamo da je

$$\partial_\mu j_s^\mu = 0. \quad (5.2.9)$$

Iz Neterine struje se određuju naelektrisanja koja su konstante kretanja. Pri ovom izvodjenju smo uzeli da su parametri simetrije funkcije koordinata. To je bilo samo pomoćno sredstvo. Sada možemo da ponovo se vratimo na konstantne parametre simetrije.

Ako je klasično dejstvo invarijantno na transformacije date sa (5.2.1) i ako je mera integracije invarijantna na ove transformacije,

$$D\phi' = D\phi \quad (5.2.10)$$

kažemo da su ove transformacije simetrija kvantne teorije. Ako mera integracije nije invarijantna klasična simetrija je kvantno narušena. Za takve simetrije koje važe klasično a kvantno su narušene kažemo da su anomalne.

Postupajući kao u prethodnom poglavlju lako vidimo da kvantna simetrija daje

$$\int \mathcal{D}\phi \left[ \delta S + \int d^4x J_a \delta_0 \phi_a \right] e^{iS[\phi] + i \int d^4x J^a \phi_a} = 0 . \quad (5.2.11)$$

Zamenom (5.2.8) u (5.2.11) dobijamo

$$\int \mathcal{D}\phi \left[ - \int d^4x \epsilon_s \partial_\mu j_s^\mu + \int d^4x J_a \delta_0 \phi_a \right] e^{iS[\phi] + i \int d^4x J^a \phi_a} = 0 . \quad (5.2.12)$$

Sada možemo da uzmemo da su parametri  $\epsilon_s$  konstantni. Stavljanjem da je izvor jednak nuli u (5.2.12) dobijamo

$$\partial_\mu \langle \Omega | j^\mu | \Omega \rangle = 0 . \quad (5.2.13)$$

Ako izraz (5.2.12) diferenciramo po izvoru  $J^{a_1}(x_1)$  i stavimo da je izvor jednak nuli dobijamo

$$\partial_{\mu x} \langle \Omega | T j^\mu(x) \phi_{a_1}(x_1) | \Omega \rangle = -i \delta^{(4)}(x - x_1) \langle \Omega | \delta_0 \phi_{a_1}(x_1) | \Omega \rangle . \quad (5.2.14)$$

Diferenciranjem dva puta po izvorima i uzimanjem da  $J = 0$  dobijamo

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle \Omega | T j^\mu(x) \phi_{a_1}(x_1) \phi_{a_2}(x_2) | \Omega \rangle \\ &= -i \delta(x - x_1) \delta_{aa_1} \langle \Omega | T \delta_0 \phi_a(x_1) \phi_{a_2}(x_2) | \Omega \rangle \\ & \quad - i \delta(x - x_2) \delta_{aa_2} \langle \Omega | T \phi_{a_1}(x_1) \delta_0 \phi_a(x_2) | \Omega \rangle . \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Ovaj postupak možemo dalje ponavljati. Simetrija dakle nameće uslove na korelacione funkcije.

# Glava 6

## Funkcionalni integral za fermionsko polje

U ovoj glavi spinorsko polje ćemo kvantovati u formalizmu funkcionalnog integrala. Prvo ćemo uvesti Grasmanove, tj. antikomutirajuće brojeve, njihovo diferenciranje i integraljenje, a zatim ćemo kvantovati Dirakovo polje.

### 6.1 Grasmanovi brojevi

Da bismo precizno definisali Grasmanove brojeve prvo ćemo uvesti pojam algebre. Algebra  $\mathcal{A}$  je vektorski prostor nad poljem realnih (kompleksnih) brojeva u kojem je definisana bilinearna operacija množenja elemenata algebre  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ . Proizvod elemenata  $x$  i  $y$  algebre je  $xy$ . Struktura  $\mathcal{A}$  je algebra ako je množenje distributivno prema sabiranju u vektorskom prostoru

$$(x + y)z = xz + yz . \quad (6.1.1)$$

Ako je množenje u algebri asocijativno

$$x(yz) = (xy)z \quad (6.1.2)$$

algebra je asocijativna. Ako u algebri postoji jedinični element,  $e$  takav da je  $ex = xe = x$  algebru nazivamo alegbrom sa jedinicom. Ukoliko je množenje komutativno za algebru kažemo da je komutativna.

Grasmanovi brojevi međusobno antikomutiraju, dok komutiraju sa običnim brojevima. Naime, oni zadovoljavaju

$$\begin{aligned} \theta\chi &= -\chi\theta \\ c\theta &= \theta c , \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

gde smo Grasmanove brojeve obeležili grčkim slovima  $(\theta, \chi, \dots)$ , dok obične, komutirajuće brojeve obeležavamo latiničnim slovima. U matematičkom smislu Grasmanovi brojevi formiraju asocijativnu algebru sa jedinicom.

Neka su  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  antikomutirajući generatori Grasmanove algebre

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0 . \quad (6.1.4)$$

Njihovim medjusobnim množenjem dobijamo druge članove algebre. Monomi  $\theta_1\theta_2\theta_3$  i  $\theta_2\theta_1\theta_3$  nisu medjusobno nezavisni, jer je

$$\theta_2\theta_1\theta_3 = -\theta_1\theta_2\theta_3 .$$

Jasno je da monom može najviše sadržati  $n$  različitih faktora. Proizvoljan element algebre je suma proizvoda generatora

$$g = ae + b_i\theta_i + \frac{1}{2}c_{ij}\theta_i\theta_j + \dots + \frac{1}{n!}d_{i_1\dots i_n}\theta_{i_1}\dots\theta_{i_n} , \quad (6.1.5)$$

gde su koeficijenti  $a, b_i, \dots$  kompleksni brojevi. Koeficijenti u gornjem razvoju su antisimetrični. Npr. koeficijenti  $c_{ij}$  su antisimetrični,  $c_{ij} = -c_{ji}$ .

Neki sabirci u razvoju (6.1.5) su parni (komutirajući), a neki neparni (antikomutirajući). Npr.  $\theta_1\theta_2$  je paran, jer komutira sa Grasmanovim brojevima

$$(\theta_1\theta_2)\theta_i = \theta_i(\theta_1\theta_2) . \quad (6.1.6)$$

Podela elemenata algebre na komutirajuće i antikomutirajuće naziva se gradiranjem algebre. Preciznije gradiranje elementu  $F$  algebre dodeljuje  $|F|$  sa

$$|F| = \begin{cases} 0, & F \text{ je komutirajući broj} \\ 1, & F \text{ je antikomutirajući broj} \end{cases} . \quad (6.1.7)$$

Bazis vektorskog prostora možemo da izaberemo na standardni način, uređujući indekse sa leva na desno:

$$1, \theta_i, \dots, \theta_i\theta_j \dots \theta_k \quad (i < j < \dots < k), \dots . \quad (6.1.8)$$

Za Grasmanovu algebru sa  $n$  generatora dimenzija vektorskog prostora je  $2^n$ . Ako je  $n = 1$  tada je

$$g(\theta) = a + b\theta , \quad (6.1.9)$$

dok za  $n = 2$  je

$$g(\theta_1, \theta_2) = a + \theta_1b + \theta_2c + d\theta_1\theta_2 . \quad (6.1.10)$$

Ako želimo da veličina

$$g = a + \theta_i\beta_i + \frac{1}{2}c_{ij}\theta_i\theta_j + \dots + \frac{1}{n!}d_{i_1\dots i_n}\theta_{i_1}\dots\theta_{i_n} , \quad (6.1.11)$$

bude komutirajuća observabla onda je  $a$  takodje komutirajuća, a  $\beta_i$  su antikomutirajuće itd. Jasno je da je tada Grasmanova algebra utopljena u neku veću Grasmanovu algebru.

Prostor formi na  $n$ -dimenzionoj mnogostrukosti je Grasmanova algebra. Množenje je spoljašnji proizvod (wedge proizvod).

Diferenciranje po Grasmanovim promenljivima može biti levo i desno. Levi izvod je definisan prema

$$\frac{d\theta_i}{d\theta_j} = \delta_{ij} \quad (6.1.12)$$

Izvod zadovoljava super-Lajbnicovo pravilo

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(FG) = \frac{\partial F}{\partial\theta}G + (-1)^{|F|}F\frac{\partial G}{\partial\theta} , \quad (6.1.13)$$

čijom primenom imamo

$$\frac{d}{d\theta_1}(\theta_1\theta_2) = \theta_2 \quad (6.1.14)$$

$$\frac{d}{d\theta_2}(\theta_1\theta_2) = -\theta_1 . \quad (6.1.15)$$

Diferencijal funkcije možemo da napišemo preko levih izvoda na sledeći način

$$dg = d\theta_i \frac{dg}{d\theta_i} ,$$

ali isto tako možemo da ga izrazimo i pomoću desnih izvoda kao

$$dg = g \overleftarrow{\frac{d}{d\theta_i}} d\theta_i .$$

Nekoliko primera za desni izvod<sup>1</sup> su

$$(\theta_1\theta_2) \overleftarrow{\frac{d}{d\theta_1}} = -\theta_2 , \quad (6.1.16)$$

$$(\theta_1) \overleftarrow{\frac{d}{d\theta_1}} = 1 , \quad (6.1.17)$$

$$(\theta_1\theta_2) \overleftarrow{\frac{d}{d\theta_2}} = \theta_1 . \quad (6.1.18)$$

Desno diferenciranje takodje zadovoljava super-Lajbnicovo pravilo Izvod zadovoljava super-Lajbnicovo pravilo

$$(FG) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial\theta}} = F \left( G \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial\theta}} \right) + (-1)^{|G|} \left( F \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial\theta}} \right) G . \quad (6.1.19)$$

Kako je

$$\left( \frac{d}{d\theta} \right)^2 = 0$$

---

<sup>1</sup>Generalisani impuls koji odgovara Grasmanovom polje je dobijen uzimanjem desnog izvoda

$$\pi = \mathcal{L} \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial\psi}}$$

to se integracija mora pažljivo definisati. Za  $n = 1$  definišemo

$$\int d\theta_1 = 0 \quad (6.1.20)$$

$$\int d\theta\theta = 1 \quad (6.1.21)$$

pa je

$$\int d\theta g(\theta) = \int d\theta\theta\beta = \beta . \quad (6.1.22)$$

Grasmanov integral (6.1.21) je translaciono invarijantan tj.

$$\int d\theta g(\theta + \theta_0) = \int d\theta(a + (\theta + \theta_0)\beta) = \int d\theta g(\theta) . \quad (6.1.23)$$

Translacionu invarijantnost obezbedjuje integral (6.1.20), dok je (6.1.21) normalizacija. Generalno, u algebi sa  $n$  generatora važi

$$\int d\theta_i = 0 \quad (6.1.24)$$

$$\int d\theta_i\theta_i = 1 . \quad (6.1.25)$$

U poslednjem izrazu ne sumiramo po indeksu  $i$ . Očigledno je

$$\int d\theta_2 d\theta_1 d\theta_3 \theta_3 \theta_1 \theta_2 = 1 . \quad (6.1.26)$$

Koeficijent  $d_{i_1 \dots i_n}$  u izrazu (6.1.5) je kompletno antisimetričan, pa je

$$d_{i_1 \dots i_n} = d\epsilon_{i_1 \dots i_n} , \quad (6.1.27)$$

gde je  $d$  običan broj. Onda je

$$\int d\theta_n \dots d\theta_1 g = \int d\theta_n \dots d\theta_1 \theta_1 \dots \theta_n d = d . \quad (6.1.28)$$

Razmotrimo šta se dešava ako napravimo linearnu smenu promenljivih u Grasmanovom integralu. Dakle, uzmimo da je

$$\theta_i = K_{ij}\theta'_j , \quad (6.1.29)$$

gde je  $K$  nesingularna matrica komutirajućih brojeva. Tada je

$$\begin{aligned} g &= a + \dots + \frac{1}{n!} K_{i_1 j_1} \dots K_{i_n j_n} \theta'_{j_1} \dots \theta'_{j_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} d \\ &= a + \dots + \frac{1}{n!} \det K \theta'_{j_1} \dots \theta'_{j_n} \epsilon_{j_1 \dots j_n} d . \end{aligned} \quad (6.1.30)$$

Pretpostavimo da je veza izmedju starog i novog elementa zapremine data sa

$$d\theta_n \dots d\theta_1 = J d\theta'_n \dots d\theta'_1 ,$$

gde veličinu  $J$  treba da odredimo. Očigledno je da je

$$\begin{aligned} d &= \int d\theta_n \dots d\theta_1 g(\theta) = \int d\theta'_n \dots d\theta'_1 Jg(\theta') \\ &= Jd \det K, \end{aligned} \quad (6.1.31)$$

odakle je

$$J = \frac{1}{\det K} = \frac{1}{\left| \frac{\partial \theta}{\partial \theta'} \right|}. \quad (6.1.32)$$

Dakle, kod Grasmanovog integrala mera integracije se transformiše prema

$$d\theta_n \dots d\theta_1 = \left| \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right| d\theta'_n \dots d\theta'_1. \quad (6.1.33)$$

Ovaj zakon transformacije je suprotan od zakona transformacije elementa zapremine kod običnog višestrukog integrala

$$dx_n \dots dx_1 = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| dx'_n \dots dx'_1.$$

Gausov integral Grasmanovih promenljivih ( $M$  je realna antisimetrična matrica) je

$$I_n(M) = \int d\theta_n \dots d\theta_1 e^{-\frac{1}{2}\theta^T M \theta} = (-1)^{n/2} \sqrt{\det M}, \quad (6.1.34)$$

za  $n = 2k$ , dok je za  $n = 2k + 1$  gornji integral jednak nuli. Sa  $\theta$  smo obeležili  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$ . Sada ćemo pokazati formulu (6.1.34). Matrica  $M$  je antisimetrična, pa je  $iM$  hermitska matrica. Hermitsku matricu možemo dijagonalizovati

$$M_d = U(iM)U^\dagger.$$

Matrica  $U$  je unitarna, a  $M_d$  dijagonalna sa realnim brojevima na dijagonali. Neka je  $\lambda$  realna svojstvena vrednost matrice  $iM$ , tj.

$$\det(iM - \lambda I) = 0.$$

Transponovanjem gornje jednačine dobijamo  $\det(iM + \lambda I) = 0$ . Dakle, ako je  $\lambda$  svojstvena vrednost matrice  $iM$ , tada je i  $-\lambda$  svojstvena vrednost ove matrice. Matrica  $M_d$  ima oblik

$$M_d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix}. \quad (6.1.35)$$

Uvedimo  $2 \times 2$  unitarnu matricu

$$R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}. \quad (6.1.36)$$

Lako se vidi da je

$$R_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R_2^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.1.37)$$

Uvedemo dalje blok dijagonalnu matricu

$$R = \begin{pmatrix} R_2 & & \\ & R_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (6.1.38)$$

Tada je

$$M' = -iRM_dR^\dagger = RUM(RU)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}. \quad (6.1.39)$$

Polaznu antisimetričnu matricu  $M$  smo transformisali u kvazidijagonalan oblik, tzv. standarnu formu  $M'$ . Matrica transformacije  $RU$  je ortogonalna jer su matrice  $M$  i  $M'$  realne. Napravimo sada smenu  $\theta' = (RU)^{-1}\theta$  u integralu (6.1.34). Lako se vidi da je

$$\frac{1}{2}\theta^T M \theta = \frac{1}{2}\theta'^T M' \theta' = \lambda_1 \theta'_1 \theta'_2 + \lambda_3 \theta'_3 \theta'_4 + \dots + \lambda_{n-1} \theta'_{n-1} \theta'_n \quad (6.1.40)$$

pa je

$$\begin{aligned} I_n(M) &= \int d\theta'_n \dots d\theta'_1 e^{-(\lambda_1 \theta'_1 \theta'_2 + \lambda_3 \theta'_3 \theta'_4 + \dots + \lambda_{n-1} \theta'_{n-1} \theta'_n)} \\ &= \int d\theta'_n \dots d\theta'_1 e^{-\lambda_1 \theta'_1 \theta'_2} \dots e^{-\lambda_{n-1} \theta'_{n-1} \theta'_n} \\ &= (-)^{n/2} (\lambda_1 \lambda_3 \dots \lambda_{n-1}) \int d\theta'_n \dots d\theta'_1 \theta'_1 \dots \theta'_n \\ &= (-)^{n/2} (\lambda_1 \lambda_3 \dots \lambda_{n-1}) \\ &= (-)^{n/2} \sqrt{\det M}. \end{aligned} \quad (6.1.41)$$

Ovim smo pokazali (6.1.34).

Integral (6.1.34) ćemo generalisati

$$I_n(M, \chi) = \int d\theta_n \dots d\theta_1 e^{-\frac{1}{2}\theta^T M \theta + \chi^T \theta} = (-)^{n/2} \sqrt{\det M} e^{-\frac{1}{2}\chi^T M^{-1} \chi}, \quad (6.1.42)$$

gde je  $M$  antisimetrična matrica.

Ako su  $\theta'$  i  $\theta''$  realni Grasmanovi brojevi onda su

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\theta' + i\theta''}{\sqrt{2}} \\ \bar{\eta} &= \frac{\theta' - i\theta''}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

kompleksni Grasmanovi brojevi. Lako se vidi da je

$$d\theta'' d\theta' = i d\eta d\bar{\eta} ,$$

pa je

$$\int d\bar{\eta} d\eta \eta \bar{\eta} = \int i d\theta'' d\theta' (-i\theta' \theta'') = 1 .$$

Gausov integral sa kompleksnim Grasmanovim promenljivim je

$$\int d\bar{\eta}_n d\eta_n \dots d\bar{\eta}_1 d\eta_1 e^{-\bar{\eta} M \eta} = \det M . \quad (6.1.43)$$

Pokažimo poslednju formulu

$$\begin{aligned} & \int d\bar{\eta}_n d\eta_n \dots d\bar{\eta}_1 d\eta_1 e^{-\bar{\eta} M \eta} \\ &= \int d\bar{\eta}_n d\eta_n \dots d\bar{\eta}_1 d\eta_1 \frac{(-1)^n}{n!} \bar{\eta}_{i_1} \eta_{j_1} \bar{\eta}_{i_2} \eta_{j_2} \dots \bar{\eta}_{i_n} \eta_{j_n} m_{i_1 j_1} \dots m_{i_n j_n} \\ &= \int d\bar{\eta}_n d\eta_n \dots d\bar{\eta}_1 d\eta_1 (-1)^n \bar{\eta}_1 \eta_{j_1} \bar{\eta}_2 \eta_{j_2} \dots \bar{\eta}_n \eta_{j_n} m_{1 j_1} \dots m_{n j_n} \\ &= \int d\eta_n \dots d\eta_1 \eta_{j_1} \eta_{j_2} \dots \eta_{j_n} m_{1 j_1} \dots m_{n j_n} \\ &= \int d\eta_n \dots d\eta_1 \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n \epsilon_{j_1 \dots j_n} m_{1 j_1} \dots m_{n j_n} \\ &= \det M . \end{aligned} \quad (6.1.44)$$

Generalizacija Gausovog integrala sa kompleksnim Grasmanovim varijablama je

$$\int d\bar{\eta}_n d\eta_n \dots d\bar{\eta}_1 d\eta_1 e^{-\bar{\eta} M \eta + \bar{\eta} \rho + \bar{\rho} \eta} = \det M e^{\bar{\rho} M^{-1} \rho} . \quad (6.1.45)$$

Beskonačno dimenziona Grasmanova algebra se dobija zamenom diskretnog indeksa  $i$  kontinualnim  $x$ :

$$\theta_i \rightarrow \theta(x) .$$

Tako smo dobili Grasmanovo (antikomutirajuće) polje, tj.

$$\{\theta(x), \theta(y)\} = 0 . \quad (6.1.46)$$

Osnovni integrali sa Grasmanovim poljem su

$$\int d\theta = 0 , \quad (6.1.47)$$

$$\int d\theta \theta = 1 . \quad (6.1.48)$$

Gausov funkcionalni integral je

$$\int D\psi D\bar{\psi} e^{-\int dx dy \bar{\psi}(y) A(y,x) \psi(x) + \int dx (\bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi)} = \det A e^{\int dx dy \bar{\eta}(y) A^{-1}(y,x) \eta(x)} . \quad (6.1.49)$$

U (6.1.49) integralimo po kompleksnim spinorskim (antikomutirajućim, tj. Grasmanovim) poljima  $\psi$  i  $\bar{\psi}$ . Polja  $\eta(x)$  i  $\bar{\eta}(x)$  su izvori i oni su takodje antikomutirajući. Uočljiva je razlika izmedju bozonskih i fermionskih integrala. Bozonski integrli (2.0.5, 2.0.11) su proporcionalni sa inverznom determinantom. Sa druge strane, fermionski integrali (6.1.49) su proporcionalni sa determinantom.

## 6.2 Slobodno Dirakovo polje

Generišući funkcional za slobodno Dirakovo polja dat je sa

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = N \int D\psi D\bar{\psi} e^{i \int dx \bar{\psi} (i \not{\partial} - m + i\epsilon) \psi + i \int dx (\bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta)} , \quad (6.2.50)$$

gde su  $\eta(x)$  i  $\bar{\eta}(x)$  Grasmanovi izvori. Funkcionalni integral (6.2.50) ima oblik (6.1.49), gde je matrica  $A$  data sa

$$A(y, x) = i(i \not{\partial}_x + m - i\epsilon) \delta^{(4)}(y - x) .$$

Furijeovom transformacijom polja  $\psi$  i  $\bar{\psi}$  imamo

$$\begin{aligned} \int dx dy \bar{\psi}(y) A(y, x) \psi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^8} \int dp dq \bar{\tilde{\psi}}(q) \int dx dy A(y, x) e^{iq \cdot y - ip \cdot x} \tilde{\psi}(p) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^8} \int dp dq \bar{\tilde{\psi}}(q) \tilde{A}(q, -p) \tilde{\psi}(p) , \end{aligned} \quad (6.2.51)$$

gde je

$$\begin{aligned} \tilde{A}(q, -p) &= \int dx dy (-\not{\partial}_x + im + \epsilon) \delta^{(4)}(y - x) e^{iq \cdot y - ip \cdot x} \\ &= -i(2\pi)^4 (\not{p} - m + i\epsilon) \delta^{(4)}(p - q) . \end{aligned} \quad (6.2.52)$$

Inverzni opertor  $\widetilde{A}^{-1}(p, q)$  u impulsnom prostoru definisan je sa

$$\int \frac{dq}{(2\pi)^4} \tilde{A}(p, q) \widetilde{A}^{-1}(-q, k) = (2\pi)^4 \delta(p + k) . \quad (6.2.53)$$

Lako se vidi da je

$$\widetilde{A}^{-1}(p, q) = i(2\pi)^4 \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \delta^{(4)}(p + q) ,$$

pa je

$$\begin{aligned}
A^{-1}(y, x) &= \int \frac{dpdk}{(2\pi)^8} \widetilde{A^{-1}}(p, k) e^{-ip \cdot y - ik \cdot x} \\
&= \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)} \\
&= \frac{i}{i\not{\partial}_y - m + i\epsilon} \delta(y-x) \\
&= iS_F(y-x) .
\end{aligned} \tag{6.2.54}$$

Dakle inverzni opertor operatora  $A$  je Fajnmanov propagator za Dirakovo polje. Prema tome, primenom (6.1.49) nalazimo generišući funkcional za slobodno Dirakovo polje

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = e^{-\int dx dy \bar{\eta}(y) iS_F(y-x) \eta(x)} . \tag{6.2.55}$$

Grinove funkcije su vakuumske očekivane vrednosti vremenskog uredjenja proizvoda polja

$$G^{(2n)}(x_1, \dots, x_n, y_1 \dots y_n) = \langle 0 | T \hat{\psi}(x_1) \dots \hat{\psi}(x_n) \hat{\bar{\psi}}(y_1) \dots \hat{\bar{\psi}}(y_n) | 0 \rangle , \tag{6.2.56}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
G^{(2n)}(x_1, \dots, x_n, y_1 \dots y_n) &= \frac{\int D\psi D\bar{\psi} \psi(x_1) \dots \psi(x_n) \bar{\psi}(y_1) \dots \bar{\psi}(y_n) e^{iS}}{\int D\psi D\bar{\psi} e^{iS}} \\
&= \frac{\delta^{(2n)} Z[\eta, \bar{\eta}]}{\delta \bar{\eta}(x_1) \dots \delta \bar{\eta}(x_n) \delta \eta(y_1) \dots \delta \eta(y_n)} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} .
\end{aligned} \tag{6.2.57}$$

Primetimo da smo koristili sledeću 'smenu'

$$\begin{aligned}
\bar{\psi} &\rightarrow i \frac{\delta}{\delta \eta} \\
\psi &\rightarrow -i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} .
\end{aligned} \tag{6.2.58}$$

Vremensko uredjenje je definisano vodeći računa da su operatori  $\hat{\psi}$  i  $\hat{\bar{\psi}}$  antikomutirajući. Lako se nalazi da je dvotačkasta Grinova funkcija Fajnmanov propagator za Dirakovo polje. Naime, dvotačkasta Grinova funkcija je definisana sa

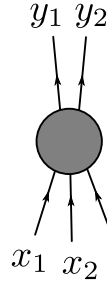
$$G_{ab}^{(2)}(x_1, y_1) = \langle 0 | T \psi_a(x_1) \bar{\psi}_b(y_1) | 0 \rangle = \frac{\delta^2 Z_0}{\delta \bar{\eta}_a(x_1) \delta \eta_b(x_2)} \Big|_{\eta, \bar{\eta}=0} . \tag{6.2.59}$$

Lako se vidi da je

$$G_{ab}^{(2)}(x_1, y_1) = iS_{Fab}(x_1 - y_1) . \tag{6.2.60}$$

U operatorskom formalizmu je

$$iS_{Fab}(x_1 - y_1) = \theta(x_1^0 - y_1^0) \langle 0 | \psi_a(x_1) \bar{\psi}_b(y_1) | 0 \rangle - \theta(y_1^0 - x_1^0) \langle 0 | \bar{\psi}_b(y_1) \psi_a(x_1) | 0 \rangle . \tag{6.2.61}$$



Slika 6.1: Grinova funkcija za Dirakovo polje.

$$iS_{F_{ab}}(x_1 - y_1) = \frac{y_1}{b} \longrightarrow \frac{x_1}{a}$$

Slika 6.2: Fajnmanov propagator za slobodno Dirakovo polje.

Na KTP1 je pokazano da Fajnmanov propagator opisuje kreiranje elektrona u tački  $y_1$  koji propagira do tačke  $x_1$  ako je  $x_1^0 > y_1^0$ . Sa druge strane ako je  $x_1^0 < y_1^0$  on odgovara kreiranju pozitrona u  $x_1$ , njegovu propagaciju do  $y_1$  gde se on anihilira.

Četvorotačkasta Grinova funkcija je

$$\begin{aligned} G^{(4)}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \langle 0 | T \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) \hat{\bar{\psi}}(y_1) \hat{\bar{\psi}}(y_2) | 0 \rangle. \\ &= \frac{\delta^4 Z_0}{\delta \bar{\eta}(x_1) \delta \bar{\eta}(x_2) \delta \eta(y_1) \delta \eta(y_2)} \Big|_{\eta, \bar{\eta}=0}. \end{aligned} \quad (6.2.62)$$

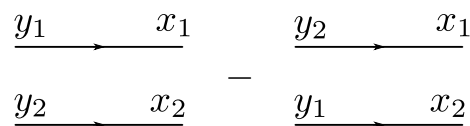
Lako se nalazi da je

$$G^{(4)}(x_1, x_2, y_1, y_2) = S_F(x_1 - y_1) S_F(x_2 - y_2) - S_F(x_1 - y_2) S_F(x_2 - y_1). \quad (6.2.63)$$

Rezultat je poznat i na osnovu Vikove teoreme i prikazan je na slici 6.3.

### 6.3 Majorana spinorsko polje

Pri konjugaciji naboja spinor  $\psi$  prelazi u  $\psi_c = C \bar{\psi}^T$ . Matrica konjugacije naboja zadovoljava  $C \gamma_\mu C^{-1} = \gamma_\mu^T$  i  $C^T = C^{-1} = -C$ . Majorana spinori zadovoljavaju uslov  $\psi_c = \psi$ , tj. oni se



Slika 6.3: Četvorotačkasta Grinova funkcija za slobodno Dirakovo polje.

poklapaju sa svojim  $C$ - konjugovanim spinorom. Dirakovo polje je analogno kompleksnom skalarnom polju, dok je Majorana polje analogno realnom skalarnom polju. Lako se vidi da je za Majorana spinore  $\bar{\psi} = \psi^T C$ . Drugim rečima  $\psi$  i  $\bar{\psi}$  nisu nezavisna polja. Gustina lagranžijana slobodnog Majorana polja data sa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \psi^T C (i\cancel{\partial} - m) \psi . \quad (6.3.64)$$

Generišući funkcional za slobodno Majorana polje je

$$Z_0[\eta] = N \int D\psi e^{\frac{i}{2} \int dx \psi^T C (i\cancel{\partial} - m + i\epsilon) \psi + i \int dx \eta^T \psi} , \quad (6.3.65)$$

gde je  $\eta(x)$  izvor. Lako se dobija da je

$$Z_0[\eta] = e^{\frac{i}{2} \int dx dy \eta^T(y) S_F(y-x) C^{-1} \eta(x)} . \quad (6.3.66)$$

Dvo-tačkasta Grinova funkcija je

$$G_{ab}^{(2)}(x, y) = \langle 0 | T \psi_a(x) \psi_b(y) | 0 \rangle = - \frac{\delta^2 Z_0}{\delta \eta_a(x) \delta \eta_b(x)} \Big|_{\eta=0} . \quad (6.3.67)$$

Lako se vidi da je

$$G_{ab}^{(2)}(x, y) = -i S_{Fbc}(y-x) C_{ca}^{-1} . \quad (6.3.68)$$



# Glava 7

## Funkcionalni formalizam: Gauge teorije

### 7.1 Kratak podsetnik

Neka je  $G$  prosta grupa simetrije a  $\psi(x)$  multiplet polja koji se transformiše po fundamentalnoj reprezentaciji grupe  $G$

$$\psi'_i(x) = e^{-iT_{ij}^a \theta_a} \psi_j(x).$$

$\theta_a$  su parametri a  $T^a$  generatori grupe. Npr. za  $SU(n)$  grupu  $i = 1, \dots, n$ ,  $a = 1, \dots, n^2 - 1$ . Lagranžijan materije

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x), \quad (7.1.1)$$

je invarijantan na globalne transformacije

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= e^{-iT_a \theta_a} \psi(x), \\ \bar{\psi}'(x) &= \bar{\psi}(x) e^{iT_a \theta_a}. \end{aligned}$$

Kovarijantni izvod je definsan sa

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu + igT^a A_\mu^a) \psi, \quad (7.1.2)$$

gde je  $g$  konstanta interakcije, a  $A_\mu^a$  gauge polja. Želimo da konstruišemo teoriju koja je invarijantna na lokalne transformacije

$$\psi'(x) = e^{-iT_a \theta_a(x)} \psi(x).$$

Kovarijantni izvod  $D_\mu \psi$  se mora transformisati pri lokalnim (kalibracionim, gauge) transformacijama na isti način kao polja materije  $\psi$ :

$$[D_\mu \psi]' = e^{-iT_a \theta_a(x)} [D_\mu \psi]. \quad (7.1.3)$$

Iz ovog uslova sledi zakon transformacije gauge polja  $A_\mu$

$$A'_\mu = U(x) \left( A_\mu - \frac{i}{g} \partial_\mu \right) U^{-1}(x) \quad (7.1.4)$$

gde je  $A_\mu = A_\mu^a T^a$  i  $U(x) = e^{-i T^a \theta^a(x)}$ . U komponentnoj notaciji

$$A'_\mu{}^a = A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a(x) - f^{abc} \theta^c(x) A_\mu^b = A_\mu^a + \frac{1}{g} (D_\mu \theta)^a, \quad (7.1.5)$$

gde su  $f_{abc}$  strukturne konstante algebre  $\mathfrak{su}(n)$

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c. \quad (7.1.6)$$

Tenzor jačine polja je definisan sa

$$F_{\mu\nu} = -\frac{i}{g} [D^\mu, D^\nu]. \quad (7.1.7)$$

Iz prethodne relacije sledi

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig [A_\mu, A_\nu], \quad (7.1.8)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (7.1.9)$$

Pri gauge transformacijama tenzor jačine polja se menja po

$$F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^{-1}. \quad (7.1.10)$$

Yang Mills-ov lagranžijan je

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} \sum_a F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}. \quad (7.1.11)$$

Neka je  $G$  poluprosta grupa;  $T^a(r)$  su generatori u ireducibilnoj reprezentaciji  $r$  normirani prema

$$\text{tr}(T^a(r) T^b(r)) = C(r) \delta^{ab}. \quad (7.1.12)$$

U pridruženoj (adjoint) reprezentaciji ( $r = G$ )

$$(T^b)_{ac} = i f^{abc}.$$

$T^a(r) T^a(r)$  je Kazimirov operator i po Šurovoj lemi

$$T^a(r) T^a(r) = C_2(r) I,$$

gde je  $I$  jedinična matrica formata  $d(r) \times d(r)$ . U pridruženoj reprezentaciji je

$$T^a(G) T^a(G) = C_2(G) I.$$

Množenjem (7.1.12) sa  $\delta^{ab}$  imamo

$$\text{tr}(T^a(r) T^a(r)) = d(G) C(r)$$

odnosno

$$C_2(r) d(r) = d(G) C(r).$$

Za fundamentalnu reprezentaciju  $SU(N)$  grupe je

$$\begin{aligned} C(N) &= \frac{1}{2} \\ C_2(N) &= \frac{N^2 - 1}{2N} \end{aligned} \quad (7.1.13)$$

dok je u pridruženoj reprezentaciji  $C(G) = C_2(G) = N$ .

## 7.2 Kvantovanje kalibracionih polja

Lagranžijan YM teorije (bez materije) je

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} . \quad (7.2.1)$$

Napisaćemo ga kao zbir kinetičkog  $\mathcal{L}_0$  i interakcionog dela,  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (7.2.2)$$

gde je

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu^a \partial^\nu A_a^\mu - \partial_\nu A_\mu^a \partial^\mu A_a^\nu), \quad (7.2.3)$$

a

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{g}{2}f^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)A_b^\mu A_c^\nu - \frac{g^2}{4}f^{abc}f^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A_d^\mu A_e^\nu . \quad (7.2.4)$$

Propagator za gauge polje računamo iz dela lagranžijana kvadratnog po poljima

$$S_0[A_\mu^a] = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu^a [g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu] A_\nu^a \quad (7.2.5)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x d^4y A_\mu^a(x) [g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu] \delta(x-y) A_\nu^a(y) \quad (7.2.6)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x d^4y A_\mu^a(x) K^{\mu a, \nu b}(x, y) A_\nu^b(y) . \quad (7.2.7)$$

U impulsnom prostoru operator  $K$  je

$$K^{\mu a, \nu b}(p, k) = (2\pi)^4 (-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) \delta(p+k) \delta^{ab} . \quad (7.2.8)$$

Inverzni operator

$$K_{\mu a, \nu b}^{-1} = (A g_{\mu\nu} + B k_\mu k_\nu) \delta_{ab} \delta(p+k)$$

ne postoji, jer je operator  $K^{\mu a, \nu b}(x, y)$  singularan. Razlog za ovu singularnost je gauge simetrija. U path integralu moramo da integralimo po nezavisnim stepenima slobode, a ne po svim potencijalima.

Generalisani impulsi su

$$\pi_\mu^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu^a} = F_{\mu 0}^a . \quad (7.2.9)$$

Odmah vidimo da je  $\pi_0^a = 0$ . Ovo je tzv. primarna veza. Zbog ove veze Poasonova zagrada

$$\{A_\mu^a(t, \mathbf{x}), \pi_\nu^b(\mathbf{t}, \mathbf{y})\} = \mathbf{i} \delta_\nu^\mu \delta^{ab} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

ne može biti primenjena za  $\mu = \nu = 0$ . Sistemi sa vezama se analiziraju u okviru tzv. Dirakovog formalizma u koji nećemo ovde ulaziti. Pored primarne veze postoji još jedna (tzv. sekundarna) veza

$$D_i \pi^{ia} = 0 ,$$

koja je Gausova teorema. Zbog postojanja veza u teoriji nisu svi potencijali i generalisani impulsi nezavisni; broj nezavisnih stepeni slobode je manji nego skup faznih promenljivih  $A_\mu^a, \pi_\mu^a$ . Zato je potrebno u funkcionalnom integralu izdvojiti prave, fizičke stepene slobode.

### 7.3 Fadejev-Popovljeva metoda

Sa  $A_{a\mu}^U$  označimo potencijal  $A_{a\mu}$  posle lokalne transformacije. U funkcionalnom integralu

$$\int \mathcal{D}A^\mu e^{iS[A^\mu]}$$

treba da integralimo samo po neekvivalentnim potencijalima. Naime potencijali  $A_{a\mu}^U$  i  $A_{a\mu}$  opisuju istu konfiguraciju polja. Zato moramo sa svake trajektorije (gauge ekvivalentni potencijali) izdvojiti po jednog predstavnika. Cilj je izdvajanje funkcionalnog integrala po lokalnim transformacijama (elementima grupe simetrije). Taj integral ćemo obeležiti sa  $\int \mathcal{D}U$ . Može se definisati funkcionalni integral po lokalnim transformacijama tako da za svaki funkcional  $f[U]$  i fiksnu lokalnu transformaciju  $U'(x)$  važi

$$\int \mathcal{D}U f[U] = \int \mathcal{D}U f[UU']. \quad (7.3.10)$$

Tačnost prethodne relacije se lako dokazuje kada je oblast integracije infinitezimalna. Tada možemo da uzmemo

$$\mathcal{D}U = \prod_a \mathcal{D}\theta_a. \quad (7.3.11)$$

Neka su  $U$ ,  $U'$  i  $U''$  tri infinitezimalne lokalne transformacije za koje važi

$$U'' = UU'. \quad (7.3.12)$$

Iz prethodne jednačine imamo

$$1 - iT_a\theta_a'' = (1 - iT_a\theta_a)(1 - iT_b\theta_b'). \quad (7.3.13)$$

Odavde imamo

$$\theta_a'' = \theta_a + \theta_a' + O(\theta^2) \quad (7.3.14)$$

i

$$\det \left( \frac{\partial \theta_a''}{\partial \theta_b'} \right) = 1 + O(\theta^2) \quad (7.3.15)$$

Da bismo dokazali relaciju (7.3.10) dovoljno je da izvršimo smenu promenljivih

$$\int \mathcal{D}U'' f[U''] = \int \mathcal{D}U f[U''] \det \left( \frac{\partial \theta_a''}{\partial \theta_b'} \right) = \int \mathcal{D}U f[UU']. \quad (7.3.16)$$

Da bismo integralili samo po predstavnicima orbite u funkcionalnom integralu moramo da uvedemo uslove kojima se biraju predstavnici, tzv. uslove koji fiksiraju gauge. Te uslove zadajemo skupom jednačina

$$F_a(A_\mu^a) = 0, \quad (7.3.17)$$

gde su  $F_a$  funkcije kalibracionih polja i njihovih izvoda. Lorencov kalibracioni uslov je

$$F_a(A^\mu) = \partial_\mu A_a^\mu. \quad (7.3.18)$$

Uvedimo lokalno invarijantan funkcional

$$\Delta[A_\mu] = \int \mathcal{D}U \delta^{(n)}[F_a(A_\mu^U)], \quad (7.3.19)$$

gde je  $\delta^{(n)}[F_a] = \prod_a \delta[F_a]$  funkcionalna delta funkcija. Lokalna invarijantnost (7.3.19) se lako pokazuje

$$\Delta[A_{a\mu}^{U'}] = \int \mathcal{D}U \delta^{(n)}[F_a(A_{a\mu}^{UU'})] = \int \mathcal{D}U \delta^{(n)}[F_a(A_{a\mu}^U)] = \Delta[A_{a\mu}]. \quad (7.3.20)$$

Sada možemo generišući funkcional da napišemo kao

$$\int \mathcal{D}A^\mu e^{iS[A^\mu]} = \int \mathcal{D}A^\mu \Delta^{-1}[A^\mu] \int \mathcal{D}U \delta^{(n)}[F_a(A_\mu^U)] e^{iS[A^\mu]}. \quad (7.3.21)$$

Uzevši u obzir i lokalnu invarijantnost funkcionala  $\Delta[A_{a\mu}]$  imamo

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{iS[A_\mu]} = \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A_\mu^U \Delta^{-1}[A_\mu^U] \delta[F_a(A_\mu^U)] e^{iS[A_\mu^U]}. \quad (7.3.22)$$

Ako izvršimo smenu  $A_{a\mu}^U \rightarrow A_{a\mu}$  dobijamo

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{iS[A_\mu]} = \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A_\mu \Delta^{-1}[A_\mu] \delta[F_a(A_\mu)] e^{iS[A_\mu]}. \quad (7.3.23)$$

Ovim smo uspeli da izdvojimo integraciju po lokalnim transformacijama. Integral  $\int \mathcal{D}U$  predstavlja beskonačnu konstantu koja ulazi u normalizaciju, pa imamo

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{iS[A_\mu]} = \int \mathcal{D}A_\mu \Delta^{-1}[A_\mu] \delta^{(n)}[F_a(A_\mu)] e^{iS[A_\mu]}. \quad (7.3.24)$$

Potrebno je izračunati  $\Delta^{-1}[A_{a\mu}]$ . U (7.3.19) izvršimo smenu promenljivih sa  $DU$  na  $\prod_a DF_a$ , koristeći (7.3.11)

$$\Delta[A_{a\mu}] = \int \mathcal{D}U \delta^{(n)}[F_a(A_\mu^U)] \quad (7.3.25)$$

$$= \int \prod_b \mathcal{D}\theta_b \delta^{(n)}[F_a(A_{a\mu}^\theta)] \quad (7.3.26)$$

$$= \int \prod_c \mathcal{D}F_c \det \left( \frac{\delta\theta_b(x)}{\delta F_c(y)} \right) \delta^{(n)}[F_a(A_\mu^\theta)] \quad (7.3.27)$$

$$= \det \left( \frac{\delta\theta_b(x)}{\delta F_c(y)} \right) \Big|_{F_a=0} \quad (7.3.28)$$

Korišćenje (7.3.11) je opravdano jer funkcionalna delta funkcija u (7.3.19) ograničava  $\mathcal{D}U$  na infinitezimalnu oblast oko jedinične transformacije. Sa  $F_a(x)$  smo označili  $F_a[A_{a\mu}^\theta(x)]$ . Iz (7.3.25) dobijamo

$$\Delta[A_{a\mu}]^{-1} = \det \left( \frac{\delta F_a(x)}{\delta\theta_b(x')} \right) \Big|_{F_a=0}. \quad (7.3.29)$$

Ovo je tzv. Fadeev-Popovljeva determinanta. Zamenom (7.3.29) u (7.3.24) dobijamo

$$Z[J^\mu] = N \int \mathcal{D}A_\mu \det \left( \frac{\delta F_a(x)}{\delta \theta_b(x')} \right) \delta^{(n)}[F_a(A^\mu)] e^{iS[A_{a\mu}] + J_\mu^a A^{\mu a}}. \quad (7.3.30)$$

Nadjimo Fadeev-Popovljevu determinantu u slučaju Lorencovog gauga

$$F^a[A] = \partial_\mu A^{\mu a}.$$

Funkcionalni izvod izraza

$$F^a[A^\theta] = \partial_\mu (A^{\mu a} + \frac{1}{g} \partial^\mu \theta^a - f^{abc} \theta^c A^{\mu b}) \quad (7.3.31)$$

po parametrira gauge grupe je

$$\frac{\delta F_a(x)}{\delta \theta_b(y)} = \partial_{\mu x} \left( \frac{1}{g} \delta^{ab} \partial_x^\mu \delta(x-y) - f^{acb} (A^{\mu c}(x) \delta(x-y)) \right). \quad (7.3.32)$$

Determinantu matrice  $M$  možemo da napišemo kao integral po Grasmanovim poljima  $c^a$  i  $\bar{c}^a$

$$\int \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c e^{-i \int d^4x \int d^4x' \bar{c}^a(x) M^{ab}(x,x') c_b(x')} = \det(M_{ab}), \quad (7.3.33)$$

gde je  $\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c = \prod_a \mathcal{D}\bar{c}^a \mathcal{D}c^a$  mera integracije. Ako uzmemo da je

$$M_{ab}(x, x') = \frac{\delta F_a(x)}{\delta \theta_b(x')} \quad (7.3.34)$$

važi

$$\det \left( \frac{\delta F_a(x)}{\delta \theta_b(x')} \right) = \int \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c e^{-i \int d^4x \int d^4x' \bar{c}^a(x) \frac{\delta F_a(x)}{\delta \theta_b(x')} c^b(x')}. \quad (7.3.35)$$

U slučaju Lorentz-ovog gauga imamo

$$\begin{aligned} \det \left( \frac{\delta F_a(x)}{\delta \theta_b(x')} \right) &= \int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c} e^{i \int d^4x \partial_\mu \bar{c}^a(x) (\partial^\mu c^a(x) - g f_{acb} A_c^\mu c_b(x))} \\ &= \int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c} e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{gh}}}. \end{aligned} \quad (7.3.36)$$

Izraz u eksponentu je tzv. dejstvo za duhovima (ghost dejstvo). Gostovi su skalari u odnosu na Lorencove transformacije. Sa druge strane oni su antikomutirajuće (Grasmanove) veličine. Oni ne mogu biti spoljašnje linije u dijagramima, jer nisu opservabilni.

Gauge uslove ćemo generalisati na sledeći način

$$F_a = \partial_\mu A^{\mu a} - f^a(x).$$

Funkcije  $f^a(x)$  ne utiču na  $Z$  i možemo da integralimo po njima sa Gausovom težinom

$$\int \left( \prod_c \mathcal{D}f_c \right) e^{\frac{i}{2\xi} \int d^4x f_a^2(x)}. \quad (7.3.37)$$

Kako je

$$\int \left( \prod_c \mathcal{D}f_c \right) e^{\frac{i}{2\xi} \int d^4x f_a^2(x)} \delta^{(n)}[\partial_\mu A^{\mu a} - f^a(x)] = e^{-\frac{i}{2\xi} \int d^4x (\partial_\mu A^{\mu a})^2}, \quad (7.3.38)$$

to dobijamo

$$Z[J_\mu^a] = N \int \mathcal{D}A^{\mu a} \det \left( \frac{\delta F_a(x)}{\delta \theta_b(x')} \right) e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_{YM}(A_\mu^a) + J_\mu^a A_\mu^a - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a(x))^2)}, \quad (7.3.39)$$

odnosno

$$Z[J_\mu^a] = N \int DA^{\mu a} Dc D\bar{c} e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_{YM} - \bar{c}^a M^{ab} c^b - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a(x))^2 + J_\mu^a A_\mu^a)}. \quad (7.3.40)$$

Prvi član u eksponentu je Yang Millsovo dejstvo, drugi je član sa ghostovima, dok je treći član tzv. gauge fiksing član.

Parametar  $\xi$  je proizvoljan i fizičke veličine ne zavise od njega.  $\xi = 0$  je Landauvljev 'gauge', a  $\xi = 1$  Fajnmanov 'gauge'. Koristili smo navodnike jer reč gauge nije adekvatna; sve je to Lorencov gauge. Gauge teorije se mogu kvantovati i sa drugim kalibracionim uslovom. Npr.  $A_3^a = 0$ – aksijalni gauge,  $\partial_i A^{ia} = 0$ – Kulonov gauge.

## 7.4 Fajnmanova pravila

Efektivni lagranžijan koji se pojavljuje u izrazu za generišući funkcional je

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} A_\mu^a \left[ g^{\mu\nu} \square - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right] A_{\nu a} - \bar{c}^a \square c^a + \bar{\psi}_i (i\not{\partial} - m) \psi_i \\ &+ \frac{g}{2} f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) A_b^\mu A_c^\nu - \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A_d^\mu A_e^\nu \\ &- g f^{abc} \partial_\mu \bar{c}^a A^{\mu b} c^c - g \bar{\psi}_i \gamma^\mu T_{ij}^a A^{\mu a} \psi_j, \end{aligned} \quad (7.4.41)$$

gde smo uključili i materiju. Prvi red je kvadratan po poljima i on nam daje propagatore. Drugi i treći red su interakcioni članovi.

Generišući funkcional za slobodnu teoriju je

$$Z_0[J_\mu^a, \bar{\sigma}_a, \sigma_a, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}A_{a\mu} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J_\mu^a A_\mu^a + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi + \bar{c}^a \sigma^a + \bar{\sigma}^a c^a)}, \quad (7.4.42)$$

gde je

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} A_\mu^a \left[ g^{\mu\nu} \square - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right] A_{\nu a} - \bar{c}^a \square c^a + \bar{\psi}_i (i\not{\partial} - m) \psi_i. \quad (7.4.43)$$

Rezultat integracije je

$$\begin{aligned} Z_0 &= e^{-\frac{i}{2} \int dx dy J_\mu^a(x) (K^{-1})^{\mu\nu ab}(x,y) J_\nu^b(y)} \\ &\times e^{-i \int dx dy \bar{\eta}(y) [i\not{\partial}_y - m + i\epsilon]^{-1} \delta(y-x) \eta(x) + i \int dx dy \bar{\sigma}^a(y) \square^{-1} \delta(y-x) \sigma^a(x)}. \end{aligned} \quad (7.4.44)$$

Odredimo inverzni operator od

$$K^{\mu\nu ab}(x, y) = \left[ g^{\mu\nu} \square - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right]_x \delta(x - y) \delta^{ab} . \quad (7.4.45)$$

Lako se nalazi

$$\tilde{K}^{\mu\nu ab}(p, q) = (2\pi)^4 \left[ -p^2 g^{\mu\nu} + \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) p^\mu p^\nu \right] \delta^{ab} \delta(p + q) . \quad (7.4.46)$$

Inverzni nalazimo iz uslova

$$\int d^4 q \tilde{K}^{\mu\nu ab}(p, q) \widetilde{(K^{-1})}_{\nu\rho bc}(-q, r) = (2\pi)^8 \delta_c^a \delta(p + r) \delta_\rho^\mu \quad (7.4.47)$$

Pretpostavljajući rešenje u obliku

$$\widetilde{(K^{-1})}_{\nu\rho bc}(-q, r) = (2\pi)^4 \left[ A(q) g_{\nu\rho} + B q_\nu q_\rho \right] \delta(q - r) \delta_{bc} \quad (7.4.48)$$

lako nalazimo

$$\widetilde{(K^{-1})}_{\nu\rho bc}(-q, r) = (2\pi)^4 \left[ -\frac{1}{q^2 + i\epsilon} g_{\nu\rho} + (1 - \xi) \frac{q_\nu q_\rho}{q^2} \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \right] \delta(q - r) \delta_{bc} . \quad (7.4.49)$$

Dvo-tačkasta Grinova funkcija za gauge polja je

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x_1, x_2) &= \langle 0 | T A_\rho^d(x_1) A_\sigma^c(x_2) | 0 \rangle \\ &\quad - \left. \frac{\delta^2 Z_0}{\delta J_\rho^d(x_2) \delta J_\sigma^c(x_1)} \right|_{J=0} \\ &= i(K^{-1})_{\sigma\rho cd}(x_1, x_2) . \end{aligned} \quad (7.4.50)$$

U impulsnom prostoru ona se dobija iz

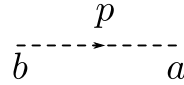
$$\begin{aligned} &\int dx_1 dx_2 G^{(2)}(x_1, x_2) e^{ipx_1 + iqx_2} \\ &= i(2\pi)^4 \delta(p + q) \delta_{cd} \left[ -\frac{1}{p^2 + i\epsilon} g^{\sigma\rho} + (1 - \xi) \frac{p^\sigma p^\rho}{p^2} \frac{1}{p^2 + i\epsilon} \right] \end{aligned} \quad (7.4.51)$$

Propagator za gauge polja u impulsnom prostoru je

$$i \left[ -\frac{1}{q^2 + i\epsilon} g_{\nu\rho} + (1 - \xi) \frac{q_\nu q_\rho}{q^2} \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \right] \delta_{cd} . \quad (7.4.52)$$

Propagator duhova u koordinatnom prostoru je

$$\begin{aligned} \langle 0 | T c^a(x_1) \bar{c}^b(x_2) | 0 \rangle &= \frac{\delta^2}{\delta \bar{\sigma}^a(x_1) \delta \sigma^b(x_2)} e^{i \int dx dy \bar{\sigma}^a(y) \square^{-1} \delta(y-x) \sigma^a(x)} \Big|_{\sigma=\bar{\sigma}=0} \\ &= -i \square^{-1} \delta(x_1 - x_2) \delta^{ab} \\ &= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}}{p^2 + i\epsilon} \delta^{ab} . \end{aligned} \quad (7.4.53)$$



Slika 7.1: Fajnmanov propagator za polje duhova.



Slika 7.2: Fajnmanov propagator za kalibraciono polje i za fermione.

U impulsnom prostoru on je

$$\frac{i\delta^{ab}}{p^2 + i\epsilon} . \quad (7.4.54)$$

Na slici 7.1 smo grafički prikazali ovaj propagator.

Fermionski propagator u impulsnom prostoru je

$$\frac{i\delta_{ij}}{\not{p} - m + i\epsilon} . \quad (7.4.55)$$

Trogluonski verteksi je dat sa

$$V_3 = gf_{abc}(g_{\alpha\gamma}(p_1 - p_3)_\beta + g_{\alpha\beta}(p_2 - p_1)_\gamma + g_{\beta\gamma}(p_3 - p_2)_\alpha) , \quad (7.4.56)$$

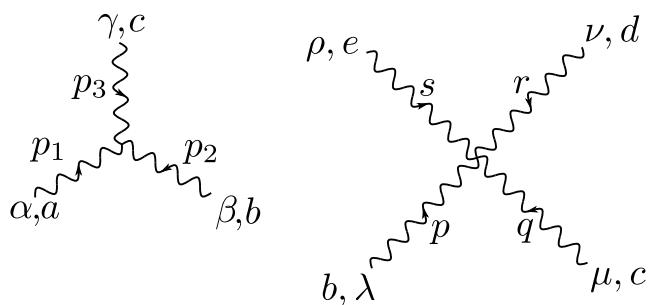
gde je  $p_1 + p_2 + p_3 = 0$ . Četvorogluonski verteks je

$$\begin{aligned} V_4 = & - \frac{i}{4}g^2(f_{abc}f_{ade}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu}) \\ & + f_{adc}f_{abe}(g_{\nu\lambda}g_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}g_{\mu\lambda}) \\ & + f_{abd}f_{ace}(g_{\lambda\mu}g_{\nu\rho} - g_{\lambda\rho}g_{\nu\mu})), \end{aligned} \quad (7.4.57)$$

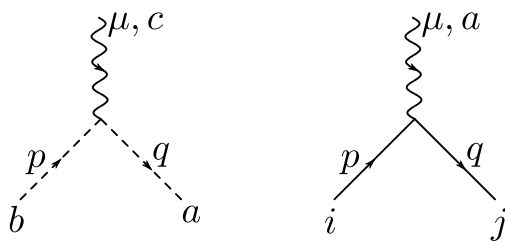
uz uslov na impulse

$$p + q + r + s = 0. \quad (7.4.58)$$

Ova dva verteksa smo prikazali na slici 7.3. Interakcija gostova sa gauge poljima je  $-gf_{abc}p_\mu$ , a fermiona sa gauge poljima  $-ig\gamma_\mu T_{ji}^a$ . Ova dva verteksa su prikazana na slici 7.4.



Slika 7.3: Tro-gluonski i četvoro-gluonski verteksi.



Slika 7.4: Verteks za interakciju duha sa kalibracionim poljem i fermionskog polja sa kalibracionim poljem.

# Literatura

- [1] D. Bailin and A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory*, Bristol, 1986
- [2] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1996
- [3] F. Gross, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*, Wiley, New York, 1993
- [4] C. Itzykson and J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1980
- [5] F. Mandl and G. Show, *Quantum Field Theory*, New York, 1999
- [6] T. Ohlsson, *Relativistic Quantum Physics*, Cambridge University Press, 2011
- [7] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison Wesley, 1995
- [8] L. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985
- [9] P. Ramond, *Field Theory: Modern Primer*, Addison-Wesley, Reedwood City, Ca, 1989.
- [10] V. Radovanović, *Problem Book in Quantum Field Theory*, Springer, Berlin, New York, 2008
- [11] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 2009
- [12] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields I, II*, Cambridge University Press, New York, 1996